
**Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Blatt 11**

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 11.1 (Endliche Varietäten) **[2+2 Punkte]**

- (a) Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, I ein Radikalideal und $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ eine Gröbnerbasis von I , so dass $\text{LT}(g_i) = x_i^{m_i}$ für alle i . Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I)$ genau $\prod_i m_i$ viele Punkte enthält.
- (b) Sei $V = \mathcal{V}(x_3 - x_1^2, x_4 - x_1x_2, x_2x_4 - x_1x_5, x_4^2 - x_3x_5) \subseteq \mathbb{C}^5$. Entscheiden Sie (mit Beweis), ob $\mathcal{V}(I)$ endlich ist.

Aufgabe 11.2 (Monome vom beschränkten totalen Grad) **[2+2 Punkte]**

Sei k ein unendlicher Körper. In dieser Aufgabe wird die Anzahl der Monome in $k[x_1, \dots, x_n]$ vom totalen Grad d untersucht.

- (a) Sei $V = k^n$. Zeigen Sie, dass jedes Monom aus $k[x_1, \dots, x_n]$ im Komplement von $\langle \text{LT}(\mathbf{I}(V)) \rangle$ liegt.
- (b) Seien $d, n \in \mathbb{N}_0$ und sei $M_d := \{x^\alpha \mid |\alpha| \leq d\}$. Zeigen Sie, dass

$$|M_d| = \binom{n+d}{d}$$

gilt.

Aufgabe 11.3 (Quotientenringen durch Radikalideale) **[1+1+1+1 Punkte]**

Seien k ein Körper und $I \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ so, dass $k[x_1, \dots, x_n]/I$ ein endlich-dimensionaler k -Vektorraum ist.

- (a) Zeigen Sie, dass $\dim(k[x_1, \dots, x_n]/\sqrt{I}) \leq \dim(k[x_1, \dots, x_n]/I)$.
- (b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I)$ höchstens $\dim(k[x_1, \dots, x_n]/\sqrt{I})$ viele Elemente enthält.
- (c) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass in (b) nicht immer Gleichheit gilt.
- (d) Sei nun k algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass I genau dann ein Radikalideal ist, wenn die Dimension $\dim(k[x_1, \dots, x_n]/I)$ gleich der Anzahl der Punkte von $\mathcal{V}(I)$ ist.

Aufgabe 11.4 (Rationale Funktionen)**[1+1+1+1 Punkte]**

Ist V eine irreduzible Varietät und $f \in k(V)$, etwa $f = \varphi/\psi$, wobei $\varphi, \psi \in k[V]$, $\psi \neq 0$, so ist f auf $V \setminus \mathcal{V}_V(\psi)$ offensichtlich stets definiert, wobei $\mathcal{V}_V(\psi) := \{\underline{a} \in V : \psi(\underline{a}) = 0\}$.

In dieser Aufgabe werden wir sehen, dass der Definitionsbereich von f diese Menge echt enthalten kann. Sei hierzu $V = \mathcal{V}(xz - yw) \subseteq \mathbb{C}^4$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\langle xz - yw \rangle$ ein Primideal ist.
- (b) Folgern Sie, dass V irreduzibel ist und $\mathcal{I}(V) = \langle xz - yw \rangle$ gilt.
- (c) Sei $f = [x]/[y] \in \mathbb{C}(V)$, d.h. f ist auf $V \setminus \mathcal{V}_V([y])$ definiert. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{V}_V([y]) = \{(0, 0, z, w) : z, w \in \mathbb{C}\} \cup \{(x, 0, 0, w) : x, w \in \mathbb{C}\}.$$

- (d) Beweisen Sie, dass $f = [W]/[Z]$, und folgern Sie, dass f außerhalb der Menge $\{(x, 0, 0, w) : x, w \in \mathbb{C}\}$ überall definiert ist.

Abgabe: Donnerstag, 27. Januar 2022, 10:00 Uhr, per E-Mail direkt an den Tutor.