Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Dr. Michele Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Blatt 12

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 12.1 (Körper der rationalen Funktionen) **[4 Punkte]**

Sei K ein Körper, V eine irreduzible Varietät und $\varphi : K(V) \to \{\text{Rationale Abbildungen } V \dashrightarrow K\}$ die Funktion, welche ein Element $\overline{f}/\overline{g}$ aus $K(V) = \mathrm{Quot}(K[X_1, \ldots, X_n]/\mathcal{I}(V))$ auf die durch f/g repräsentierte rationale Abbildung schickt.

(a) Versehen Sie den Zielbereich von φ mit einer geeigneten Addition und Multiplikation und weisen Sie deren Wohldefiniertheit nach.

(b) Zeigen Sie, dass φ ein wohldefinierter Ringhomomorphismus ist. Zeigen oder widerlegen Sie ferner, dass φ ein Ringisomorphismus ist.

Aufgabe 12.2 (Birationale Äquivalenz I) **[4 Punkte]**

Sei k ein Körper und V, W irreduzible k-Varietäten, so dass es einen Isomorphismus von $k(V)$ nach $k(W)$ gibt, der auf k konstant ist. Zeigen Sie, dass zueinander inverse rationale Abbildungen $\varphi : V \dashrightarrow W$ und $\psi : W \dashrightarrow V$ existieren.

Aufgabe 12.3 (Birationale Äquivalenz II) **[2+1+1 Punkte]**

(a) Sei $\varphi : V \dashrightarrow W$ eine rationale Abbildung und $V' \subseteq V$ und $W' \subseteq W$ Untervarietäten, so dass φ auf $V \setminus V'$ definiert ist. Zeigen Sie, dass

$$V'' = V' \cup \{p \in V \setminus V' : \varphi(p) \in W'\}$$

eine Untervarietät von V ist.

(b) Seien V und W via $\varphi : V \dashrightarrow W$ und $\psi : W \dashrightarrow V$ birational äquivalent und seien $V' \subseteq V$ (bezüglich $\varphi \circ \psi$) und $W' \subseteq W$ (bezüglich $\psi \circ \varphi$) wie im Beweis von Theorem 10 auf Seite 273 im Buch zur Vorlesung. Seien ferner

$$\mathcal{V} = \{p \in V \setminus V' : \varphi(p) \in W \setminus W'\}$$

und

$$\mathcal{W} = \{q \in W \setminus W' : \psi(q) \in V \setminus V'\}.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ und $\psi : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ zueinander inverse Bijektionen sind.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass $\mathcal{V} = V \backslash V_1$ und $\mathcal{W} = W \backslash W_1$ für gewisse echte Untervarietäten V_1 und W_1.

Aufgabe 12.4 (Verknüpfung von rationalen Abbildungen) **[4 Punkte]**

Seien $\varphi\colon \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\psi\colon \mathbb{R}^3 \dashrightarrow \mathbb{R}$ die rationalen Abbildungen definiert durch

$$\varphi(t) = (t, 1/t, t^2), \qquad \text{und} \qquad \psi(x,y,z) = \frac{x+yz}{x-yz}.$$

Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ nicht definiert ist.

Aufgabe 12.5* (Eine nicht-rationale Varietät) **[5 Punkte]**

In Aufgabe 9.4 haben Sie gezeigt, dass es keine nicht-konstante polynomiale Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $V := \mathcal{V}(y^2 - x^3 + x) \subseteq \mathbb{R}^2$ geben kann. Nun beweisen wir, dass $\mathbb{R}$ und V zudem nicht birational äquivalent zueinander sind.

(a) Angenommen, es gäbe eine nicht-konstante rationale Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \dashrightarrow V$. Wir schreiben α in der Form $\alpha(t) = (a(t)/b(t), c(t)/d(t))$, wobei die Brüche jeweils gekürzt und b und d normiert seien. Zeigen Sie, dass $b^3 = d^2$ und $c^2 = a^3 - ab^2$.

(b) Folgern Sie, dass Polynome $A, B, C, D \in \mathbb{C}[t]$ existieren, so dass $a = A^2$, $b = B^2$, $a + b = C^2$ und $a - b = D^2$. Zeigen Sie ferner, dass A und B nicht-konstant und zueinander teilerfremd sind und dass $A^4 - B^4$ ebenfalls ein Quadrat in $\mathbb{C}[t]$ ist.

(c) Seien $A, B \in \mathbb{C}[t]$ wie in der vorherigen Teilaufgabe. Zeigen Sie, dass Polynome $A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{C}[t]$ existieren mit $A - B = A_1^2, A + B = B_1^2$ und $A^2 + B^2 = C_1^2$.

(d) Beweisen Sie, dass die Polynome A_1 und B_1 nicht-konstant und zueinander teilerfremd sind und

$$\max\{\deg(A_1), \deg(B_1)\} \leq \frac{1}{2} \max\{\deg(A), \deg(B)\}$$

gilt. Zeigen Sie ferner, dass $A_1^4 - (\sqrt{i}B_1)^4 = A_1^4 + B_1^4$ ein Quadrat in $\mathbb{C}[t]$ ist.

(e) Führen Sie schließlich die Annahme aus Teilaufgabe (a) zu einem Widerspruch, indem Sie zeigen, dass a, b, c und d konstant sein müssen.

Abgabe: Donnerstag, 03. Februar 2022, 10:00 Uhr, per E-Mail direkt an den Tutor.