Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Dr. Michele Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Blatt 13

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 13.1 (Homogene Polynome) **[1+1+1+1 Punkte]**

Sei k ein Körper.

(a) Seien $f, f_1, \ldots, f_s \in k[x_0, \ldots, x_n]$ homogene Polynome. Nach Anwendung des Divisionsalgorithmus sei $f = a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + r$. Zeigen Sie, dass $a_1, \ldots, a_s, r \in k[x_0, \ldots, x_n]$ ebenfalls homogene Polynome sind.

(b) Zeigen Sie, dass für homogene Polynome $f, g \in k[x_0, \ldots, x_n]$ auch das S-Polynom $S(f, g)$ homogen ist.

(c) Beweisen Sie, dass ein homogenes Ideal eine homogene Gröbnerbasis besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie den Buchberger-Algorithmus.

(d) Sei $I \lhd k[x_0, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ für gewisse homogene Polynome $f_1, \ldots, f_s \in k[x_0, \ldots, x_n]$.

(ii) Eine reduzierte Gröbnerbasis von I (bezüglich einer beliebigen monomialen Anordnung) besteht aus homogenen Polynomen.

Aufgabe 13.2 (Homogene Ideale I) **[2+1+1 Punkte]**

Sei k ein Körper und $I_1, \ldots, I_l \lhd k[x_0, \ldots, x_n]$ homogene Ideale. Ferner bezeichne $\mathbb{V}(J)$ für ein homogenes Ideal $J \lhd k[x_0, \ldots, x_n]$ die zugehörige projektive Varietät.

(a) Zeigen Sie, dass $I_1 + \ldots + I_l$ und $I_1 \cap \ldots \cap I_l$ und $I_1 \cdots I_l$ wieder homogene Ideale sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(I_1 + \ldots + I_l) = \bigcap_{i=1}^{l} V_i$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(I_1 \cap \ldots \cap I_l) = \mathbb{V}(I_1 \cdots I_l) = \bigcup_{i=1}^{l} V_i$.

Aufgabe 13.3 (Homogene Radical- und Primideale) **[1+2+1 Punkte]**

Sei k ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass ein homogenes Ideal $I \lhd k[x_0, \ldots, x_n]$ genau dann prim ist, wenn für alle homogenen Polynome $f, g \in I$ gilt: $fg \in I \Rightarrow f \in I$ oder $g \in I$.

(b) Sei nun k algebraisch abgeschlossen und $I \lhd k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass die projektive Varietät $\mathbb{V}(I)$ irreduzibel ist, falls I prim ist. Zeigen Sie ferner, dass die Umkehrung ebenfalls gilt, falls I ein Radikalideal ist.

(c) Sei k erneut algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\mathbb{V}$ und $\mathbb{I}$ zueinander inverse Bijektionen zwischen den homogenen, in $\langle X_0, \dots, X_n \rangle$ enthaltenen Primidealen von $k[x_0, \dots, x_n]$ und den nichtleeren, irreduziblen, projektiven Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$ sind.

Aufgabe 13.4 (Leere projektive Varietät) **[4 Punkte]**

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $I \lhd k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(I) = \emptyset$ in $\mathbb{P}^n(k)$ genau dann gilt, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) Es existiert ein $r \geq 1$, so dass jedes homogenes Polynom von Totalgrad $\geq r$ in I enthalten ist.

(ii) Das Radikal von I ist enweder $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ oder $k[x_0, \dots, x_n]$.

Aufgabe 13.5* (Projektive Varietäten) **[5 Punkte]**

Sei k ein Körper und $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine irreduzible Varietät. In dieser Aufgabe werden wir rationale Funktionen auf V einführen.

(a) Sei $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Polynom. Erläutern Sie, warum f im Allgemeinen keine wohl-definierte Abbildung auf V liefert.

(b) Seien $f, g \in k[x_0, \dots, x_n]$ homogene Polynome von Totalgrad $d \in \mathbb{N}$ und sei $g \notin \mathbb{I}(V)$. Zeigen Sie, dass $\varphi = f/g$ eine wohldefinierte Funktion auf der nichtleeren Menge $V \backslash (V \cap \mathbb{V}(g)) \subseteq V$ ist.

(c) Ist $\varphi = f/g$ und $\psi = h/l$, wobei alle diese Polynome homogen seien und f und g, sowie h und l den gleichen Totalgrad haben, so heißen φ und ψ äquivalent auf V, geschrieben $\varphi \sim \psi$, genau dann wenn es eine echte Untervarietät $W \subset V$ gibt, so dass φ und ψ auf W definiert sind und übereinstimmen. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Hinweis: Für den Beweis benötigen Sie die Irreduzibilität von V.

Eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ heißt eine **rationale Funktion auf** V und $k(V)$ sei die Menge all dieser Äquivalenzklassen.

(d) Zeigen Sie, dass Addition und Multiplikation bezüglich dieser Äquivalenzklassen wohldefiniert sind und $k(V)$ zu einem Körper machen, dem sogenanten **Körper der rationalen Funktionen der projektiven Varietät** V.

(e) Sei U_i der affine Part von $\mathbb{P}^n(k)$ (Vergleiche Kapitel 8.2) und sei $V \cap U_i \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $k(V)$ isomorph zu dem Körper $k(V \cap U_i)$ der rationalen Funktionen auf der affinen Varität $V \cap U_i$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $V \cap U_i$ eine irreduzible affine Varietät in $U_i \cong k^n$ ist.

Abgabe: Donnerstag, 10. Februar 2022, 10:00 Uhr, per E-Mail direkt an den Tutor.