Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Dr. Michele Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Blatt 13 – Musterlösung

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 13.1 (Homogene Polynome) **[1+1+1+1 Punkte]**
Sei k ein Körper.

(a) Seien $f, f_1, \ldots, f_s \in k[x_0, \ldots, x_n]$ homogene Polynome. Nach Anwendung des Divisionsalgorithmus sei $f = a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + r$. Zeigen Sie, dass $a_1, \ldots, a_s, r \in k[x_0, \ldots, x_n]$ ebenfalls homogene Polynome sind.

(b) Zeigen Sie, dass für homogene Polynome $f, g \in k[x_0, \ldots, x_n]$ auch das S-Polynom $S(f, g)$ homogen ist.

(c) Beweisen Sie, dass ein homogenes Ideal eine homogene Gröbnerbasis besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie den Buchberger-Algorithmus.

(d) Sei $I \lhd k[x_0, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ für gewisse homogene Polynome $f_1, \ldots, f_s \in k[x_0, \ldots, x_n]$.

(ii) Eine reduzierte Gröbnerbasis von I (bezüglich einer beliebigen monomialen Anordnung) besteht aus homogenen Polynomen.

Lösung

(a) Sei $d = \deg(f)$. Erinnerung: im k-ten Schritt des Divisionsalgorithmus werden Polynome P_k, r_k, a_k und Indizes i_k berechnet mit $f = P_k + r_k + a_1 f_{i_1} + \ldots + a_{k-1} f_{i_{k-1}}$. Wir zeigen, dass in jedem Schritt P_k, r_k, a_k homogen sind. Dies gilt für den Schritt $k = 0$, denn $P_0 = f$ und $a_1 = \ldots = a_s = r_0 = 0$. Angenommen dies gilt an einem gewissen Schritt, und seien $P, r, a_i, i = 1, \ldots, s$ die Zwischenergebnisse. Wenn es ein $LT(f_i)$ gibt, der $LT(P)$ teilt, dann addieren $LT(P)/LT(f_i)$ zu a_i. Da $LT(P)/LT(f_i)$ homogen vom Grad $d - \deg(f_i)$ ist, dann bleibt a_i homogen vom Grad $d - \deg(f_i)$. Dann ersetzen wir P mit $P - (LT(P)/LT(f_i))LT(f_i)$. Weil diese beide homogen vom Grad d sind, dann ist das neue P wieder homogen vom Grad d. Und r hat sich nicht geändert.

Falls keins der $LT(f_i)$ den $LT(P)$ teilt, dann ersetzen wir r mit $r + P - LT(P)$. Weil P und r homogen vom Grad d sind, dann so sind die neue r und P.

(b) Sei $x^\gamma = \mathrm{kgT}(LM(f), LM(g))$. Nach Definition ist also

$$S(f,g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)} f - \frac{x^\gamma}{LT(g)} g$$

Nun ist $\frac{x^\gamma}{LT(f)} f$ homogen vom Grad $\gamma - \deg(f) + \deg(f) = \gamma$ und das gleiche gilt für $\frac{x^\gamma}{LT(g)} g$. Die Behauptung folgt.

(c) Sei I ein homogenes Ideal, mit homogenen Erzeuger $f_1, \ldots, f_s$. Buchbergers Algorithmus fängt mit der Basis $G = \{f_1, \ldots, f_s\}$. Wenn ein Polynom eingefügt wird, dies ist der Rest eines S-Polynoms nach Division durch G. Teile (a) und (b) zeigen, das dies wieder homogen ist, weil G aus homogenen Polynome besteht. Die erweiterte Basis G besteht also wieder aus homogenen Polynomen, und bleibt somit homogen bei jedem Schritt.

(d) (ii)$\Rightarrow$(i) ist klar, da eine reduzierte Gröbnerbasis, die aus homogenen Polynomen besteht, erzeugend ist.

(i)$\Rightarrow$(ii). Nach Teil (c) existiert eine Gröbnerbasis G die aus homogenen Polynomen besteht. Um eine reduzierte Gröbnerbasis zu bekommen, teilen wir die Elemente von G durch Konstanten oder löschen wir Termen von den Polynomen. Nach beide Operationen bleibt ein homogenes Polynom homogen.

Aufgabe 13.2 (Homogene Ideale I) **[2+1+1 Punkte]**

Sei k ein Körper und $I_1, \ldots, I_l \lhd k[x_0, \ldots, x_n]$ homogene Ideale und sei $V_i := \mathbb{V}(I_i)$.

(a) Zeigen Sie, dass $I_1 + \ldots + I_l$ und $I_1 \cap \ldots \cap I_l$ und $I_1 \cdots I_l$ wieder homogene Ideale sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(I_1 + \ldots + I_l) = \bigcap_{i=1}^l V_i$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(I_1 \cap \ldots \cap I_l) = \mathbb{V}(I_1 \cdots I_l) = \bigcup_{i=1}^l V_i$.

Lösung

(a) Homogene Ideale sind von homogenen Polynomen erzeugt. Seien also $I_i = \langle f_{i1}, \ldots, f_{i,s_i} \rangle$ wobei alle f_{ij} homogen sind.

Dann ist $I_1 + \ldots + I_l = \langle f_{11}, \ldots, f_{1,s_1}, \ldots, f_{l1}, \ldots, f_{l,s_l} \rangle$ also $I_1 + \ldots + I_l$ ist von homogenen Polynomen erzeugt, und somit ist es homogen.

Sei nun $g \in I_1 \cap \ldots \cap I_l$. Da alle I_j homogen sind, gehören alle homogene Komponente von g jedem I_j, somit gehören sie $I_1 \cap \ldots \cap I_l$ was dann homogen ist.

Produkte von homogenen Polynomen sind wieder homogen. $I_1 \cdots I_l$ ist von Produkten der Erzeuger der I_js erzeugt, also auch von homogenen Polynomen.

(b) Als wir in (a) bemerkt haben, ist $I_1 + \ldots + I_l = \langle f_{11}, \ldots, f_{1,s_1}, \ldots, f_{l1}, \ldots, f_{l,s_l} \rangle$. Also wenn $p \in \mathbb{V}(I_1 + \ldots + I_l)$, dann verschwinden alle (homogene) Polynome aus allen I_j auf p, also $p \in V_j$ für alle j und somit $p \in \bigcap V_j$. Umgekehrt, wenn $p \in \bigcap V_j$ dann ist $p \in V_j$ für alle j also alle f_{ij} verschwinden auf p, also alle homogene Erzeuger von $I_1 + \ldots + I_l$ verschwinden auf p und somit alle (homogene) Polynome aus $I_1 + \ldots + I_l$.

(c) Das Argument is ähnlich wie das im Teil (b).

Aufgabe 13.3 (Homogene Radical- und Primideale) **[1+2+1 Punkte]**

Sei k ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass ein homogenes Ideal $I \lhd k[x_0, \dots, x_n]$ genau dann prim ist, wenn für alle homogenen Polynome f, g gilt: $fg \in I \Rightarrow f \in I$ oder $g \in I$.

(b) Sei nun k algebraisch abgeschlossen und $I \lhd k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass die projektive Varietät $\mathbb{V}(I)$ irreduzibel ist, falls I prim ist. Zeigen Sie ferner, dass die Umkehrung ebenfalls gilt, falls I ein Radikalideal ist.

(c) Sei k erneut algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\mathbb{V}$ und $\mathbb{I}$ zueinander inverse Bijektionen zwischen den homogenen, in $\langle X_0, \dots, X_n\rangle$ enthaltenen Primidealen von $k[x_0, \dots, x_n]$ und den nichtleeren, irreduziblen, projektiven Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$ sind.

Lösung

(a) Wenn I prim ist, dann gilt die Aussage für alle Paare von Polynome, insbesondere für homogene Polynome. Angenommen $fg \in I \Rightarrow f \in I$ oder $g \in I$ gilt für homogene Polynome, und seien nun f, g **beliebig**, mit $fg \in I$ und $g \notin I$.

Seien

$$f = \sum_{i=0}^{s} f_i \qquad g = \sum_{j=0}^{t} g_j$$

die homogene Zerlegungen. Da $g \notin I$ gibt es ein maximale $l \leq t$ mit $g_l \notin I$. Das homogene Komponente vom Grad d von fg ist $\sum_{i+j=d} f_i g_j$. Also die Komponente vom höchsten Grad ist $f_s g_t$. Wenn $t \neq l$ dann ist $g_t \in I$. Wenn wir diese Komponente von g abziehen erhalten wir $f(g - g_t) \in I$. Wir betrachten dann die höchste Komponente von $f(g - g_t)$ und wiederholen das Verfahren bis wir $f(g - \sum_{j=l+1}^{t} g_j)$. Hier ist die höchste Komponente $f_s g_l \in I$. Nach Annahme ist $g_l \notin I$, somit ist $f_s \in I$. Nun ziehen wir f_s von f ab, und wiederholen mit $(f - f_s)(g - \sum_{j=l+1}^{t} g_j)$. Da $g_l \notin I$ schließen wir, dass alle $f_i \in I$ und somit $f \in I$. Also I ist prim.

(b) Sei I ein homogenes Primideal. Wenn $\mathbb{V}(I) = \emptyset$, dann gibt es nichts zu zeigen. Sei also $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$ und $\mathbb{V}(I) = V_1 \cup V_2$. Bemerke $I(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I} = I$ weil k is alg. abgeschlossen und ein homogenes Primideal radikal ist. Sei $V \neq V_1$. Wir zeigen $\mathbb{I}(V) = \mathbb{I}(V2)$. Da $V_2 \subseteq V$, gilt $\mathbb{I}(V) \subseteq \mathbb{I}(V_2)$. Für die andere Richtung, bemerke $\mathbb{I}(V) \subseteq \mathbb{I}(V_1)$ weil $V_1 \subset V$. Seien $f \in \mathbb{I}(V_1) \setminus \mathbb{I}(V)$. und $gin\mathbb{I}(V_2)$. aus $V = V_1 \cup V_2$ folgt, dass fg auf V verschwindet und, daher $fg \in \mathbb{I}(V)$. Da I prim ist, dann ist f oder g in $\mathbb{I}(V)$. Also $f \notin \mathbb{I}(V)$ impliziert $g \in I(V)$. Dies zeigt $\mathbb{I}(V) = \mathbb{I}(V_2)$, also $V = V_2$.

Umgekehrt, sei I radikal. Wenn $\mathbb{V}(I) = \emptyset$, ist I entweder $\langle x_0, \dots, x_n\rangle$ oder $k[x_0, \dots, x_n]$. Es wurde schon bewiesen das die beide prim sind. Sei also $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$ so, dass $I = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$ und $\mathbb{V}(I)$ irreduzibel. Sei $fg \in I$ so, dass fg auf V verschwindet. Setze $V_1 := V \cup \mathbb{V}(f)$ und $V_2 := V \cup \mathbb{V}(g)$. Dann $V = V_1 \cup V_2$. Da V irreduzibel, entweder $V_1 = V$ oder $V_2 = V$. Also entweder $\mathbb{V}(f) \supseteq \mathbb{V}(I)$ oder $\mathbb{V}(g) \supseteq \mathbb{V}(I)$. Also entweder $f \in I$ oder $g \in I$. Dies zeigt, dass I Primideal ist.

(c) $\langle x_0, \dots, x_n\rangle$ und $k[x_0, \dots, x_n]$ sind die einzige homogene Primideale mit $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$. Also wenn $I \subsetneq \langle x_0, \dots, x_n\rangle$ ein homogenes Primideal ist, dann ist $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$ und, nach (b) ist irreduzibel. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I} = I$.

Umgekehrt, sei $V \neq \emptyset$ irreduzibel. Dann ist $\mathbb{I}(V)$ ein homogenes Primideal echt enthält in in $\langle x_0, \dots, x_n\rangle$. Da $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$, es folgt aus (b) dass $\mathbb{I}(V)$ prim ist.

Aufgabe 13.4 (Leere projektive Varietät) **[4 Punkte]**

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(I) = \emptyset$ in $\mathbb{P}^n(k)$ genau dann gilt, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) Es existiert ein $r \geq 1$, so dass jedes homogenes Polynom von Totalgrad $\geq r$ in I enthalten ist.

(ii) Das Radikal von I ist enweder $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ oder $k[x_0, \ldots, x_n]$.

Lösung

(i) Sei $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$. Nach Satz 9.25 gibt es $r \geq 1$ mit $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r \subseteq I$. Jedes homogenes Polynom vom Grad $\geq r$ liegt in $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle^r \subseteq I$. Umgekehrt, wenn (i) stimmt, dann sind $x_0^r, \ldots, x_n^r \in I$. Daher ist $V = \emptyset$.

(ii) Weil $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(\sqrt{I})$, wenn $\sqrt{I} = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ oder $\sqrt{I} = k[x_0, \ldots, x_n]$. Dann $\mathbb{V}(I) = \emptyset$. Umgekehrt, sei $\mathbb{V}(I) = \emptyset$. Dann, nach Satz 9.25 ist $\sqrt{I} \supseteq \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$. Aber $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ ist radikal, also $\sqrt{I}$ ist entweder $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ oder $k[x_0, \ldots, x_n]$.

Aufgabe 13.5* (Projektive Varietäten) **[5 Punkte]**

Sei k ein Körper und $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine irreduzible Varietät. In dieser Aufgabe werden wir rationale Funktionen auf V einführen.

(a) Sei $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ ein homogenes Polynom. Erläutern Sie, warum f im Allgemeinen keine wohl-definierte Abbildung auf V liefert.

(b) Seien $f, g \in k[x_0, \ldots, x_n]$ homogene Polynome von Totalgrad $d \in \mathbb{N}$ und sei $g \notin \mathbb{I}(V)$. Zeigen Sie, dass $\varphi = f/g$ eine wohldefinierte Funktion auf der nichtleeren Menge $V \setminus (V \cap \mathbb{V}(g)) \subseteq V$ ist.

(c) Ist $\varphi = f/g$ und $\psi = h/l$, wobei alle diese Polynome homogen seien und f und g, sowie h und l den gleichen Totalgrad haben, so heißen φ und ψ äquivalent auf V, geschrieben $\varphi \sim \psi$, genau dann wenn es eine echte Untervarietät $W \subset V$ gibt, so dass φ und ψ auf W definiert sind und übereinstimmen. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Hinweis: Für den Beweis benötigen Sie die Irreduzibilität von V.

Eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ heißt eine **rationale Funktion auf** V und $k(V)$ sei die Menge all dieser Äquivalenzklassen.

(d) Zeigen Sie, dass Addition und Multiplikation bezüglich dieser Äquivalenzklassen wohldefiniert sind und $k(V)$ zu einem Körper machen, dem sogenanten **Körper der rationalen Funktionen der projektiven Varietät** V.

(e) Sei U_i der affine Part von $\mathbb{P}^n(k)$ (Vergleiche Kapitel 8.2) und sei $V \cap U_i \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $k(V)$ isomorph zu dem Körper $k(V \cap U_i)$ der rationalen Funktionen auf der affinen Varität $V \cap U_i$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $V \cap U_i$ eine irreduzible affine Varietät in $U_i \cong k^n$ ist.

Abgabe: Donnerstag, 10. Februar 2022, 10:00 Uhr, per E-Mail direkt an den Tutor.