Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Weihnachtsblatt

1	2	3	4	Σ

Frohe Weihnachten auch an den Tutor! Dieses Zusatzblatt ist freiwillig, ihr könnt jedoch Bonuspunkte sammeln, indem ihr eure Lösungen zu diesen Zusatzaufgaben im neuen Jahr abgebt.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Zusatzaufgabe 1 (Irreduzible affine Varietäten in der Ebene) **[3 Punkte]**

Sei $V \subseteq \mathbb{C}^2$ eine irreduzible affine Varietät. Zeigen Sie, dass genau einer folgenden drei Fälle eintrit:

(i) V ist endlich.

(ii) $V = \mathbb{C}^2$.

(iii) V ist eine *Kurve* in $\mathbb{C}^2$, d.h. $V = \mathcal{V}(f)$ für ein $f \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}$.

Zusatzaufgabe 2 (Endliche affine Varietäten) **[2 Punkte]**

Sei k algebraisch abgeschlossen und sei $I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal sowie G eine Gröbner-Basis für I bzgl. einer monomialen Anordnung $>$ auf $\mathbb{N}_0^n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die affine Varietät $\mathcal{V}(I)$ ist endlich.

(ii) Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert ein $g \in G \setminus \{0\}$ so, dass $\mathrm{LM}(g) \in k[x_i]$.

Ist es notwendig anzunehmen, dass k algebraisch abgeschlossen ist?

Zusatzaufgabe 3 (Radikale Hauptideale) **[1 + 3 Punkte]**

(a) Sei A ein faktorieller Ring, sei $s \in \mathbb{N}$ und seien $p_1, \ldots, p_s \in A$ irreduzibel, paarweise nicht-assoziiert sowie $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Hauptideal $\langle p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \rangle$ genau dann radikal ist, wenn $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 1$.

(b) Sei $f \in k[x]$ ein Polynom und setze $I := \langle f \rangle$. Zeigen Sie:

  (i) Ist f separabel, so ist das Ideal I radikal.

  (ii) Ist k vollkommen und das Ideal I radikal, so ist f separabel.

  (iii) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu (ii), wenn der Körper k nicht vollkommen ist.
  (Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass der Körper $\mathbb{F}_p(t)$ nicht vollkommen ist.)

Zusatzaufgabe 4 (Idealeigenschaften) **[4 Punkte]**

Seien $f_1, \ldots, f_n \in k[x_1]$ Polynome mit $\deg(f_1) > 0$ und setze

$$I := \langle f_1(x_1), x_2 - f_2(x_1), \ldots, x_n - f_n(x_1) \rangle \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n].$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Jedes $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ kann eindeutig als $f = q + r$ mit $q \in I$ und $r \in k[x_1]$ geschrieben werden so, dass $r = 0$ oder $\deg(r) < \deg(f_1)$.

(ii) Für $f \in k[x_1]$ gilt $f \in I$ genau dann, wenn f von f_1 in $k[x_1]$ geteilt wird.

(iii) Das Ideal I ist genau dann prim, wenn f_1 irreduzibel in $k[x_1]$ ist.

(iv) Das Ideal I ist genau dann radikal, wenn f_1 quadratfrei in $k[x_1]$ ist.

(v) Es gilt $\sqrt{I} = \langle (f_1)_{\text{red}} \rangle + I$ (siehe Definition 10, Cox et al. Ch. IV, §2).

Abgabe: Freitag, 07. Januar 2022, 23:59 Uhr, per E-Mail direkt an den Tutor.