Typographische Zahlentheorie

Sofie Vaas

24. November 2021

Proseminar zur Algebra und Logik
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lothar Sebastian Krapp

Abstract

Typographische Zahlentheorie (TNT) ist ein formales System, welches die natürlichen Zahlen beschreibt. Die Idee ist, dass im System die wahren und falschen mathematischen Aussagen rein syntaktisch bestimmt werden können. Wie TNT die natürlichen Zahlen beschreibt und wie zahlentheoretische Aussagen in TNT abgeleitet werden können, soll im Folgenden vorgestellt werden.

Einleitung

Die ganzen Zahlen und damit auch die natürlichen Zahlen sind Hauptgegenstand der Zahlentheorie. Eine Möglichkeit, die natürlichen Zahlen formal zu beschreiben, bietet das System TNT (*Typographical Number Theory*). Die Idee ist, dass im System die wahren und falschen mathematischen Aussagen bestimmt werden können, nur aufgrund der äußeren Form. Daher auch der Name: Die mathematischen Sachverhalte sollen typographisch, das heißt nur syntaktisch, betrachtet werden.[1] Wie TNT die natürlichen Zahlen beschreibt und wie wahre mathematischen Aussagen in TNT bestimmt werden können, soll im Folgenden vorgestellt werden.
Dafür wird im ersten Kapitel beschrieben, was ein formales System ist, und es soll motiviert werden, warum es hilfreich ist, wahre Aussagen syntaktisch zu bestimmen. Im zweiten Kapitel wird sich mit dem Aufbau von TNT auseinandergesetzt. Da sich TNT von einstufiger Prädikatenlogik hauptsächlich in den Axiomen unterscheidet, werden diese genauer erläutert. Anhand eines Beispiels soll verdeutlicht werden, wie in TNT wahre mathematische Aussagen bestimmt werden können. Abschließend soll im dritten Kapitel ein Ausblick gegeben werden, warum TNT das Ziel, *alle* wahren Aussagen zu bestimmen, nicht erreicht.

1. Grundbegriffe und Motivation

1.1. Formales System

Bevor wir uns TNT genauer anschauen, werden grundlegende Begriffe definiert. Wir wollen allgemein sagen, was ein formale System ist. Um dieses definieren zu können, müssen wir den Begriff des Alphabets einführen:

Definition 1 (Alphabet)**.** Ein Alphabet A ist eine endliche Menge aus Grundzeichen. Die Elemente von A werden auch Zeichen oder Symbole genannt.[2]

Definition 2 (Zeichenreihe)**.** Sei A ein Alphabet. Eine Zeichenreiche ist eine endliche Sequenz $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ von Elementen $a_1, \dots, a_n \in A$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, eine Zeichenreihe über einem Alphabet A ist ein Element von A^n für ein $n \in \mathbb{N}$.[3]

Will man eine formales System definieren, muss festgelegt werden, welche Zeichen in der Sprache benutzen werden dürfen. Diese werden durch das Alphabet festgelegt: Die Zeichen aus der Menge des Alphabets dürfen im formalen System genutzt werden. Zeichenreihen

[1] [Berto, S.55.]
[2] [Smullyan, S.3.]
[3] [Brickhill, S.1.]

sind Abfolgen von Symbolen aus dem Alphabet. Sie sind Ausdrücke des formalen Systems und werden aus dem Alphabet gebildet. Wir sind so in der Lage das formale System zu definieren:

Definition 3 (Formales System über einem Alphabet A)**.** Ein formales System F über einem Alphabet A besteht aus:[4]

(i) einem Alphabet A

(ii) Ableitungsregeln

(iii) einer abzählbaren Anzahl an Axiomen

Das Alphabet haben wir schon definiert. Axiome sind festgelegte Formeln. Die Ableitungsregeln geben an, wie eine Formel des Systems aus einer anderen Formel abgeleitet wird. Eine weitere Definition, die wir später brauchen, ist die des Theorems im formalen System:

Definition 4 (Theorem)**.** Ein Theorem eines formalen Systems F ist eine Zeichenfolge, die entweder ein Axiom ist, oder aus den Axiomen von F ableitbar ist, indem endlich oft die Ableitungsregeln angewendet werden.[5]

1.2 Motivierendes Beispiel

Ein Beispiel für ein formales System ist die einstufige Prädikatenlogik. Wir wollen sie benutzen, um zu zeigen, was es heißt, dass in einem formalen System die Wahrheit einer mathematischen Aussage allein aufgrund ihrer äußeren Form bestimmt werden kann. Dafür leiten wir die Formel $P \vee \neg P$ aus den Axiomen mithilfe der Ableitungsregeln her:[6]

1.	[	
2.	P	(Annahme)
3.	$\neg\neg P$	(Doppelte Negationsregel)
4.	]	
5.	$P \to \neg\neg P$	(Implikationseinführung)
6.	$\neg\neg\neg P \to \neg P$	(Kontraposition)
7.	$\neg P \to \neg P$	(Doppelte Negationsregel)
8.	$P \vee \neg P$	(Umformungsregel)

[4] [Smullyan, S.4.]
[5] [Smullyan, S.5.]
[6] [Hofstadter, S.188.]

Nach Definition 4 handelt es sich bei der Formel $P \vee \neg P$ um ein Theorem. Das bedeutet unabhängig von der Bedeutung von P außerhalb des formalen System, ist $P \vee \neg P$ immer wahr. Setzen wir beispielsweise für P „4 ist eine Primzahl“ ein, erhalten wir mit der Interpretation der logischen Symbole den wahren Satz: „4 ist eine Primzahl oder 4 ist keine Primzahl“. Das ist für uns insofern wichtig, als dass wir mathematische Aussagen, die formal die Form $P \vee \neg P$ haben, unabhängig von ihrer Bedeutung bereits als wahr identifizieren können. Allerdings hat einstufige Prädikatenlogik einen großen Nachteil: Sie ist sehr grobkörnig. Damit ist gemeint, dass in ihr die meisten primitiven Eigenschaften, die für Zahlentheoretiker*innen wichtig sind, nicht dargestellt werden können.[7] Ein Beispiel: Der Satz „5 ist eine Primzahl“ kann in einstufiger Prädikatenlogik so dargestellt werden:

$$P(a),$$

wobei P für die Eigenschaft steht, eine Primzahl zu sein, und a für 5 steht. Das unterschlägt aber wesentliche strukturelle Eigenschaften: Was wir mit der Eigenschaft, eine Primzahl zu sein, eigentlich ausdrücken wollen, sind bestimmte Teilereigenschaften der Zahl 5. Das heißt, die Eigenschaft eine Primzahl zu sein, lässt sich im zahlentheoretischen Kontext auf Teilereigenschaften reduzieren. Diese können nur mithilfe der Multiplikation dargestellt werden, die in einstufiger Prädikatenlogik aber nicht repräsentiert ist. Zum anderen ist auch die Zahl 5 nicht einfach eine Zahl aus unserer betrachteten Menge, sondern sie hat strukturelle Eigenschaften, die zahlentheoretisch von Bedeutung sind: Sie ist zum Beispiel der Nachfolger der Zahl 4. Das heißt sie steht in einem gewissen Zusammenhang oder Ordnung zu den anderen Elementen, die wir betrachten wollen. Insofern sollte das formale System auch die Struktur der natürlichen Zahlen darstellen, um zahlentheoretisch brauchbare Aussagen machen zu können.

Im Gegensatz zur einstufigen Prädikatenlogik können in TNT die primitiven arithmetischen Operationen und die Struktur der natürlichen Zahlen dargestellt werden, weswegen wir uns dieses System im Folgenden genauer anschauen wollen.

2. TNT

Wie schon erwähnt, formalisiert TNT die natürlichen Zahlen axiomatisch. Um einen Satz wie „5 ist eine Primzahl“ zu formalisieren, benötigt das System Zeichen und Anordnungsregeln, die wir uns zuerst anschauen werden, um anschließen die Ableitungsregeln und Axiome zu betrachten.

[7] [Hofstadter, S. 204f.]

2.1 Zeichen und Wohlgeformtheit in TNT

Definition 5 (Sprache von TNT)**.** Die Sprache $\mathcal{L}_{\text{TNT}} = \{S, \overline{+}, \overline{*}, \overline{0}\}$ von TNT besteht aus den folgenden **nicht logischen** Zeichen:[8]

(i) Einstelliges Funktionssymbol: S

(ii) Zweistellige Funktionssymbole: $\overline{+}, \overline{*}$

(iii) Ein Konstantensymbol: $\overline{0}$

Die logischen Zeichen (inklusive zweistelliges Identitätsrelationszeichen $\equiv$) mit ihrer üblichen Interpretation übernehmen wir aus der einstufigen Prädikatenlogik.
Den Zeichen $\overline{+}$ und $\overline{*}$ würden wir intuitiv die Bedeutung der Addition und der Multiplikation zuordnen. Allerdings sind sie bis jetzt nur Zeichen ohne jegliche Bedeutung. Wir werden später sehen, dass sie auch die intuitive Bedeutung der Addition und Multiplikation erhalten. Um sie aber nicht mit ihrer Bedeutung zu verwechseln und anzuzeigen, dass wir uns in der Sprache des formalen Systems befinden, haben sie Überstriche. $\overline{0}$ wird die Bedeutung der 0 zugeordnet. S wird als „der Nachfolger von" interpretiert. Mithilfe von $\overline{0}$ und S können die natürlichen Zahlen im System dargestellt werden.

Definition 6 (Zahlzeichen)**.** $\overline{0}$ ist ein Zahlzeichen.
Ist φ ein Zahlzeichen, so ist auch $S(\varphi)$ ein Zahlzeichen.[9]

$S(S(S(\overline{0})))$ hat die Interpretation „Der Nachfolger des Nachfolgers des Nachfolgers der 0". So wird die Zahl 3 in TNT repräsentiert.
Definition 6 ist schon die erste Wohlgeformtheitsregel. Da wir gesagt haben, welche Zeichen TNT hat, muss noch festgelegt werden, wie die Zeichen von TNT zusammengesetzt werden dürfen. Wir definieren im Folgenden also, welche Formeln wohlgeformt sind. Da TNT eine Erweiterung der einstufigen Prädikatenlogik ist, werden die Regeln für wohlgeformte Formeln für Zeichen, die auch die Prädikatenlogik besitzt, übernommen und es werden im Folgenden nur die Regeln aufgezählt die Zeichen betreffen, die nicht in der Prädikatenlogik zu finden sind.

Definition 7 (Terme)**.** Zahlzeichen und Variablen sind $\mathcal{L}_{\text{TNT}}$-Terme.
Ist φ ein $\mathcal{L}_{\text{TNT}}$-Term, so ist auch $S(\varphi)$ ein $\mathcal{L}_{\text{TNT}}$-Term.
Sind φ und ψ $\mathcal{L}_{\text{TNT}}$-Terme, so sind auch $(\varphi \mathbin{\overline{+}} \psi)$ und $(\varphi \mathbin{\overline{*}} \psi)$ $\mathcal{L}_{\text{TNT}}$-Terme.[10]

[8] [Berto, S.56.]
[9] [Hofstadter, S.213.]
[10] [Hofstadter, S.214.]

Definition 8 (Atomare Formeln)**.** Sind φ und ψ $\mathcal{L}_{\mathrm{TNT}}$-Terme, so ist $\varphi \equiv \psi$ eine atomare Formel.[11]

Beispiel: $S(S(\overline{0})) \equiv (x_3 \overline{+} x_9)$ ist eine atomare Formel.

Bis jetzt haben wir für TNT die Notation festgelegt. Um Sätze wie „5 ist eine Primzahl“ zu übersetzen, beziehungsweise Sätze wie zum Beispiel

$$(S(S(\overline{0}))\overline{+}S(\overline{0})) \equiv S(S(S(\overline{0}))) \qquad (1)$$

wieder zurück in die mathematische Sprache zu übersetzen, fehlt uns die Bedeutung von „$\overline{+}$“ und „$\overline{*}$“. Zwei Dinge sollen in unserem formalen System für (1) gelten: Erstens sollte die Bedeutung von (1) der mathematischen Aussage „$2 + 1 = 3$“ entsprechen. Und zweitens, da „$2 + 1 = 3$“ eine wahre Aussage ist, sollte (1) ein Theorem von TNT sein, sowie auch die formale Darstellung der Aussage „5 ist eine Primzahl“. Die Bedeutung der Aussage (1) basiert auf der Bedeutung von $\overline{+}$ und $\overline{*}$, welche durch die Axiome von TNT festgelegt sind. Um festzustellen, dass (1) ein Theorem von TNT ist, muss es gemäß Definition 4 aus den Axiomen mithilfe der Ableitungsregeln abgeleitet werden können. Das bedeutet zusammenfassend, es müssen auch noch die Ableitungsregeln und die Axiome festgelegt werden.

2.2 Ableitungsregeln von TNT

Die Ableitungsregeln aus der einstufigen Prädikatenlogik werden übernommen. Das bedeutet, die Ableitung aus 1.2 behält ihre Gültigkeit in TNT und demnach wäre beispielsweise

$$(S(\overline{0}) \equiv \overline{0}) \vee \neg(S(\overline{0}) \equiv \overline{0})$$

ein Theorem von TNT.
Für die Nachfolger-Funktion und die Identität werden die Ableitungsegeln ergänzt durch:

Definition 9 (Ableitungsregeln für Identität)**.** Seien φ, ψ und σ $\mathcal{L}_{\mathrm{TNT}}$-Terme.

SYMMETRIE: Wenn $\varphi \equiv \psi$ ein Theorem ist, dann ist auch $\psi \equiv \varphi$ ein Theorem.

TRANSITIVITÄT: Wenn $\varphi \equiv \psi$ und $\psi \equiv \sigma$ Theoreme sind, dann ist auch $\varphi \equiv \sigma$ ein Theorem.[12]

Definition 10 (Ableitungsregeln für Nachfolger)**.** Seien φ und ψ $\mathcal{L}_{\mathrm{TNT}}$-Terme.

[11] [Hofstadter, S.214.]
[12] [Hofstadter, S.219.]

S ERGÄNZEN: Wenn $\varphi \equiv \psi$ ein Theorem ist, dann ist auch $S(\varphi) \equiv S(\psi)$ ein Theorem.

S STREICHEN: Wenn $S(\varphi) \equiv S(\psi)$ ein Theorem ist, dann ist auch $\varphi \equiv \psi$ ein Theorem.[13]

Da wir sie im Folgenden oft brauchen werden, sei hier nochmal an die Spezifikationsregel und die Generalisierung erinnert:

Definition 11 (Ableitungsregel der Spezifikation)**.** Sei x eine Variable, welche in in einer Zeichenreihe φ auftritt. Wenn $\forall x \varphi$ ein Theorem ist, dann ist auch φ ein Theorem, sowie alle Zeichenketten die aus φ gebildet werden, in dem man x durch einen Term ersetzt, wo immer x in φ als freie Variable vorkommt.
Einschränkung: Der Term, der für x eingesetzt wird, darf keine Variable enthalten, über die in φ quantifiziert wird.[14]

Beispiel: Aus $\forall x(\overline{0} \mathbin{\overline{*}} S(x)) \equiv \overline{0}$ darf $(\overline{0} \mathbin{\overline{*}} S(\overline{0})) \equiv \overline{0}$ abgeleitet werden.

Definition 12 (Ableitungsregel der Generalisierung)**.** Ist φ ein Theorem, in dem eine Variable x frei vorkommt, dann ist $\forall x \varphi$ ein Theorem.
Einschränkung: Über eine freie Variable in einer Annahme darf nicht generalisiert werden.[15]

2.3 Axiome von TNT

Ein Ziel von TNT war es, die Struktur der natürlichen Zahlen formal darzustellen. Dies soll durch die Axiome gewährleistet werden. Sie sind angelehnt an den Peanoaxiomen. Die Axiome lauten:[16]

AXIOM 1: $\forall x \ \neg S(x) \equiv \overline{0}$

AXIOM 2: $\forall x \ (x \mathbin{\overline{+}} \overline{0}) \equiv x$

AXIOM 3: $\forall x \forall y \ (x \mathbin{\overline{+}} S(y)) \equiv S(x \mathbin{\overline{+}} y)$

AXIOM 4: $\forall x \ (x \mathbin{\overline{*}} \overline{0}) \equiv \overline{0}$

AXIOM 5: $\forall x \forall y \ (x \mathbin{\overline{*}} S(y)) \equiv ((x \mathbin{\overline{*}} y) \mathbin{\overline{+}} x)$

---

[13] [Hofstadter, S.219.]
[14] [Hofstadter, S.217.]
[15] [Hofstadter, S.218.]
[16] [Hofstadter, S.216.]

Axiom 1 sagt aus, dass $\overline{0}$ einen besonderen Stellenwert hat: $\overline{0}$ ist selbst kein Nachfolger. Das heißt, sie ist der Beginn der beschriebenen natürlichen Zahlen. Axiom 2 und 3 betreffen die Addition: Sie legen die Bedeutung des Zeichens $\overline{+}$ auf die Addition fest. Analog legen die Axiome 4 und 5 die Bedeutung des Zeichens $\overline{*}$ auf die Multiplikation fest, wobei der Zusammenhang mit der Addition hergestellt wird.

Beispiel: Wir können so die Interpretation der Nachfolgerfunktion nachvollziehen:

$$x \mathbin{\overline{+}} S(\overline{0}) \overset{\text{Axiom 3}}{\equiv} S(x \mathbin{\overline{+}} \overline{0}) \overset{\text{Axiom 2}}{\equiv} S(x)$$

d.h.

$$S(x) \equiv (x \mathbin{\overline{+}} S(\overline{0}))$$

. Der Nachfolger einer natürlichen Zahl, also die nächste natürliche Zahl, ist die natürliche Zahl plus 1.
Wir sind jetzt in der Lage, unseren Beispielsatz „5 ist eine Primzahl“ aus 1.2 in TNT zu formalisieren. Dafür muss der Satz etwas präziser ausgedrückt werden, sodass die zahlentheoretischen bedeutsamen Eigenschaften berücksichtigt werden. Umformuliert lautet der Satz: Es gibt keine zwei Zahlen, die jeweils größer als 1 sind, sodass 5 gleich dem Produkt der zwei Zahlen ist. Da wir nur eine Aussage von natürlichen Zahlen machen, das heißt, nur von Zahlen die größer gleich null sind betrachtet werden, kann die Bedingung, dass die zwei Zahlen größer als 1 sind auch anders formuliert werden: Es existieren keine zwei Zahlen x und y, sodass 5 gleich dem Produkt von $x+2$ und $y+2$ ist. Die Addition ist in TNT durch $\overline{+}$ repräsentiert und die Zahl 2 durch das Zahlzeichen $S(S(\overline{0}))$, sodass $x+2$ und $y+2$ in TNT als Terme

$$(x\overline{+}S(S(\overline{0}))) \quad \text{und} \quad (y\overline{+}S(S(\overline{0})))$$

dargestellt werden können, die mithilfe von Axiom 3 und 2 wieder (siehe vorangegangenes Beispiel) in

$$S(S(x)) \quad \text{und} \quad S(S(y))$$

umgeformt werden können.
Die gesamte Aussage kann dann in TNT formalisiert werden durch:[17]

$$\neg\exists x\exists y\ (S(S(S(S(S(\overline{0}))))) \ \equiv\ (S(S(x)) \mathbin{\overline{*}} S(S(y))))$$

[17] [Hofstadter, S.212]

Allerdings fehlt noch ein wichtiges Charakterisierungsmerkmal der natürlichen Zahlen, das man schnell sieht, wenn man versucht die Formel

$$\forall y(\overline{0} \mp y) \equiv y \quad (2)$$

abzuleiten.[18] Man muss die Eigenschaft für alle natürlichen Zahlen zeigen. Beginnend mit $\overline{0}$, gilt:

$$(\overline{0} \mp \overline{0}) \equiv \overline{0} \quad (2.1)$$

$$(\overline{0} \mp S(\overline{0})) \equiv S(\overline{0}) \quad (2.2)$$

$$(\overline{0} \mp S(S(\overline{0}))) \equiv S(S(\overline{0})) \quad (2.3)$$

$$\ldots$$

Die Eigenschaft kann jeweils für eine spezifische Zahl mithilfe des Axioms 2 oder 3 abgeleitet werden, das heißt (2.1) – (2.3) sind jeweils Theoreme. Allerdings lässt sich von diesen einzelnen Theoremen mit den bisher gegebenen Axiomen nicht auf (2) schließen. Dafür müssten die spezifischen Fälle für alle natürlichen Zahlen abgeleitet werden, was jedoch unendlich viele sind. Ein formales System, welches die (2) nicht als Theorem bestimmen kann, scheint die Struktur der natürlichen Zahlen und die arithmetischen Operationen nicht adäquat repräsentieren zu können. Es ist also eine weitere Ableitungsregel nötig, die es ermöglicht Formeln wie (2) abzuleiten.

Die fehlende Regel ist in den Peanoaxiomen als Induktionsaxiom verankert. Es bietet die Möglichkeit, Theoreme über Eigenschaften, die für alle natürlichen Zahlen gelten, abzuleiten, ohne eine unendliche Anzahl von Einzelfällen abzuleiten. Die Ableitungsregel lautet:

Definition 13 (Ableitungsregel Induktion)**.** Sei x eine Variable und $\varphi[x]$ eine $\mathcal{L}_{\text{TNT}}$-Formel, worin x frei vorkommt. Wenn $\varphi[\overline{0}/x]$ und $\forall x\ (\varphi[x] \rightarrow \varphi[S(x)/x])$ Theoreme sind, dann ist auch $\forall x \varphi[x]$ ein Theorem.[19]

Nach dieser Regel zeigt man, dass die Eigenschaft für die erste natürliche Zahl gilt und unter der Nachfolgerbeziehung bestehen bleibt. Da die Nachfolgerbeziehung alle natürlichen Zahlen strukturiert, ist ein Schluss darauf, dass die Eigenschaft für alle natürlichen Zahlen gilt, gerechtfertigt.

Es sei dabei angemerkt, dass es sich bei der Ableitungsregel genau genommen nicht um **eine** Regel handelt, sondern um ein Schema. Das heißt, die Regel der Induktion gibt für

[18] [Hofstadter, S.221.]
[19] [Hofstadter, S.224.]

jedes φ eine eigene Regel an. Wir haben also eigentlich abzählbar unendlich viele Regeln der Induktion. Das liegt daran, dass umgangssprachlich ausgedrückt, das Induktionsaxiom nach Peano aussagt: Für jede Eigenschaft der 0, die auch eine Eigenschaft für den Nachfolger einer Zahl ist, welche diese Eigenschaft hat, ist eine Eigenschaft aller natürlicher Zahlen. Hier wird eine Aussage *für alle Eigenschaften* getroffen, es wird also über alle Eigenschaften quantifiziert. Das ist in TNT, welches einstufig ist, nicht formal darstellbar. Daher gehen wir den Umweg über ein Schema, das eine eigene Regel für jede einzelne Eigenschaft angibt.[20] Wir können damit die Formel (2) ableiten, was gleichzeitig auch ein Beispiel für eine Ableitung einer zahlentheoretischen Aussage in TNT darstellt:[21]

1.	$\forall x\ (x \mp \overline{0}) \equiv x$	(Axiom 1)
2.	$\overline{0} \mp \overline{0} \equiv \overline{0}$	(Spezifikationsregel, $\overline{0}$ für x)
3.	$\forall x \forall y (x \mp S(y)) \equiv S(x \mp y)$	(Axiom 3)
4.	$\forall y (\overline{0} \mp S(y)) \equiv S(\overline{0} \mp y)$	(Spezifikationsregel, $\overline{0}$ für x)
5.	$(\overline{0} \mp S(y)) \equiv S(\overline{0} \mp y)$	(Spezifikationsregel)
6.	[	
7.	$\quad (\overline{0} \mp y) \equiv y$	(Annahme)
8.	$\quad S(\overline{0} \mp y) \equiv S(y)$	(S ergänzen)
9.	$\quad (\overline{0} \mp S(y)) \equiv S(\overline{0} \mp y)$	(Zeile 5)
10.	$\quad (\overline{0} \mp S(y)) \equiv S(y)$	(Transitivität)
11.	]	
12.	$(\overline{0} \mp y) \equiv y \rightarrow (\overline{0} \mp S(y)) \equiv S(y)$	($\rightarrow$ Einführung)
13.	$\forall y ((\overline{0} \mp y) \equiv y \rightarrow (\overline{0} \mp S(y)) \equiv S(y))$	(Generalisierung)
14.	$\forall y (\overline{0} \mp y) \equiv y$	(Induktion aus 2. und 13.)

TNT kann so die natürlichen Zahlen axiomatisch formalisieren. In TNT sind die arithmetischen Operationen und die Struktur der natürlichen Zahlen repräsentiert. Haben wir eine Formel als Theorem in TNT bestimmt ist die Formel in ihrer Interpretation eine wahre mathematische Aussage. Eine Frage, die sich anschließt, ist, ob umgekehrt TNT *alle* wahren mathematischen Aussagen bestimmen kann. Dazu soll ein kleiner Ausblick im nächsten Kapitel gegeben werden.

3. Ausblick

Wenn behauptet wird, dass ein Theorem von TNT in seiner Interpretation eine wahre mathematische Aussage ist, wird implizit die Korrektheit von TNT behauptet. Korrektheit

[20] [Berto, S.61.]

[21] [Hofstadter, S.224f.]

bedeutet, dass jedes Theorem von TNT in seiner Interpretation wahr ist. Die umgekehrte Richtung ist Vollständigkeit. Dass TNT vollständig ist, würde bedeuten, dass jede wahre mathematische Aussage ein Theorem in TNT ist. Wäre TNT korrekt und vollständig, dann wären die wahren mathematischen Aussagen genau die Theoreme von TNT.
Gehen wir davon aus, dass TNT nicht nur korrekt sondern auch vollständig ist, also jede wahre mathematische Aussage, die in TNT formalisiert werden kann, ein Theorem ist. In diesem Fall wäre das Bestimmen von wahren Aussagen in der Zahlentheorie sehr einfach: Man würde die Aussage in TNT zur Formeln φ übersetzen. Nach unserer Annahme gilt, falls die Aussage wahr ist, ist φ ein Theorem in TNT, falls die Aussage falsch ist, ist $\neg\varphi$ ein Theorem. Man könnte dann anfangen, alle Theoreme von TNT systematisch aufzuzählen bis man irgendwann zu φ oder $\neg\varphi$ kommt, welches dann bestimmt, ob die mathematische Aussage wahr oder falsch ist. Wir könnten so zum Bestimmen der Wahrheit aller mathematischen Aussagen einen mechanischen Prozess angeben.[22]
Das ist nicht der Fall. Das liegt daran, dass die Annahme, TNT sei vollständig, falsch ist. Man sagt auch, TNT ist unvollständig. Gödel hat mit seinem ersten Unvollständigkeitssatz gezeigt, dass sich eine Aussage finden lässt, die wahr ist, jedoch nicht in TNT ableitbar ist. Insofern können wir uns als Zahlentheoretiker zwar auf die Korrektheit des Systems verlassen, jedoch nicht darauf, dass damit die Frage nach allen wahren zahlentheoretischen Aussagen endgültig geklärt ist.

Literatur

Douglas R. Hofstadter: *Gödel, Escher, Bach: An internal golden braid*, anniversary edn, Basic Books, New York, 1999.

Francesco Berto: *There's something about Gödel – The complete guide to the incompleteness theorem*, Engl. Translation, John Wiley & sons, 2009.

Hazel Brickhill: *Introduction to Mathematical Logic*, Lecture Script, 2020.

Raymond M. Smullyan: *Theory of formal systems*, Annals of mathematical studies, Princeton University Press, 1961.

[22] [Hofstadter, S.228f.]