Lineare Algebra I

Nachträge zur Plenumsübung

Dr. Lothar Sebastian Krapp

20. März 2020

Universität Konstanz, Wintersemester 2019/2020

Dieses Manuskript enthält einige Nachträge zu Themen, die in der Plenumsübung zur Linearen Algebra I im Wintersemester 2019/2020 behandelt wurden. Es wird fortlaufend erneuert und das letzte Aktualisierungsdatum ist oben auf dieser Seite zu finden. Hierzu einige Anmerkungen:

- Die Vorlesung wird von Prof. Dr. Salma Kuhlmann gehalten. Es werden die Notationen und Resultate aus ihrem Skript verwendet, das online auf ihrer Homepage verfügbar ist.
- Die Übungszettel werden von Simon Müller und Michele Serra erstellt. Wird auf Übungen verwiesen, so sind diese Übungszettel gemeint.
- Dieses Skript gibt nicht vollständig alles wieder, was in der Plenumsübung behandelt wurde. Es soll lediglich noch einmal einige wichtige Inhalte festhalten. Sollte es weiterhin Fragen geben, so kann ich diese gerne direkt in der Plenumsübung klären.
- Für Kommentare, Korrekturhinweise und sonstige Anmerkungen bin ich sehr dankbar. Diese könnt ihr mir – ebenso wie Themen und Fragen, die in der Plenumsübung besprochen werden sollen – per E-Mail an `sebastian.krapp@uni-konstanz.de` zusenden.

1 Literaturempfehlungen

Die folgenden Bücher sind zum Download als E-Book über die Bibliothek der Universität Konstanz verfügbar. Es sind persönliche Empfehlungen, die als weiterführende Literaturhinweise für interessierte Studierende zu verstehen sind. Insbesondere sind die behandelten Inhalte unabhängig von der Vorlesung.

- Merlin Carl, *Wie kommt man darauf? – Einführung in das mathematische Aufgabenlösen* (siehe [1]):

Dieses Buch wurde von PD Dr. Merlin Carl geschrieben (derzeit Privatdozent an der Europa-Universität Flensburg in der Abteilung für Mathematik und ihre Didaktik) und basiert auf einem Proseminar mit dem Thema „Strategien zum Aufgabenlösen“ aus dem

Wintersemester 2015/2016 an der Universität Konstanz. Ziel dieses Buches ist es, systematische Herangehensweisen an Beweise zu erklären und an Beispielen und Übungsaufgaben zu verdeutlichen. Es werden sowohl Methoden unabhängig von mathematischen Gebieten also auch spezifisch für beispielsweise Lineare Algebra (Kapitel 12) oder Analysis (Kapitel 13) dargestellt. Zusatzmaterial wie Lösungen zu den Übungen im Buch sind unter http://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/Zusatzmaterial.pdf?SGWID=0-0-45-1618128-p181063970 zu finden.

- Clara Löh, Stefan Krauss und Niki Kilbertus (Hrsg.), *Quod erat knobelandum – Themen, Aufgaben und Lösungen des Schülerzirkels Mathematik der Universität Regensburg* (siehe [3]):

Dieses Buch beinhaltet Themen und Aufgaben des Schülerzirkels der Universität Regensburg. Es wurde von verschiedenen Autoren (unter anderem Dr. Jan-Hendrik Treude) zusammengetragen und setzt sich mit Knobelaufgaben auseinander, die anschaulich für Schülerinnen und Schüler erklärt werden, aber mathematisch tief in den Universitätsstoff der ersten Semester des Mathematikstudiums eintauchen. Insbesondere diejenigen, die sich z.B. für den Schulunterricht fragen, wie höhere Mathematik für interessierte Schülerinnen und Schüler veranschaulicht werden kann, werden überrascht sein: Auch wenn die Aufgaben leicht zu verstehen sind, kommt in den Lösungen die ein oder andere Methode vor, die man aus dem Studium kennt.

2 Notationen

Es werden die gleichen Notationen wie in der Vorlesung verwendet. Hier sind noch einmal einige aufgeführt:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- Für einen Körper F ist $F^\times = F \setminus \{0\}$.
- Für eine Menge A bezeichnet id_A die Identitätsabbildung auf A , also $\text{id}_A: A \rightarrow A, a \mapsto a$.

3 Rechnen in $\mathbb{Z}_n$

In der Vorlesung wurde das folgende Lemma bewiesen (siehe [2, Beweis 1.5]).

Lemma 3.1. *Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$. Dann existieren eindeutige Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}_0$, für die gilt: $0 \leq r < b$ und $a = bq + r$.*

Daraus ergibt sich die folgende Definition (siehe [2, Bezeichnung 2.1]).

Definition 3.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sei weiterhin $a \in \mathbb{Z}$. Nach Lemma 3.1 gibt es eindeutige $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ mit $0 \leq r < n$ und $a = nq + r$. Für dieses $r \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $\bar{a} = r$.

Die Gruppe $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ wurde wie folgt definiert (siehe [2, Bezeichnung 2.1]):

$$\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}, +_n: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, (a, b) \mapsto \overline{a+b}.$$

Im folgenden beweisen wir ein nützliches Lemma für das Rechnen in $\mathbb{Z}_n$ und zeigen mit diesem Lemma einen alternativen Beweis für die Assoziativität von $+_n$ in $\mathbb{Z}_n$.

Lemma 3.3. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Seien weiterhin $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: $\overline{a+bn} = \bar{a}$.*

Beweis. Nach Lemma 3.1 existieren eindeutige $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ und $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_n$ mit

$$a + bn = q_1n + r_1 \tag{3.1}$$

und

$$a = q_2n + r_2.$$

Mit Definition 3.2 erhalten wir $r_1 = \overline{a+bn}$ und $r_2 = \bar{a}$. Weiterhin erhalten wir durch Umstellen der Gleichung (3.1)

$$a = (b - q_1)n + r_1.$$

Aufgrund von Lemma 3.1 sind $q_2 \in \mathbb{Z}$ und $r_2 \in \mathbb{Z}_n$ die einzigen ganzen Zahlen, welche die Gleichung $a = q_2n + r_2$ erfüllen. Es ist aber nun

$$(b - q_1)n + r_1 = a = q_2n + r_2.$$

Daraus folgt $b - q_1 = q_2$ und $r_1 = r_2$. Insbesondere folgt daraus $\overline{a+bn} = \bar{a}$, was zu zeigen war. $\square$

Satz 3.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$:*

$$(a +_n b) +_n c = a +_n (b +_n c).$$

Beweis. Nach Definition 3.2 gibt es (eindeutige) $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$a + b = q_1n + \overline{a+b}$$

und

$$b + c = q_2n + \overline{b+c}.$$

Wir erhalten also mit Lemma 3.3 die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} (a +_n b) +_n c &= \overline{(a +_n b) + c} \\ &= \overline{(a + b) + c} \\ &= \overline{(a + b - q_1n) + c} \\ &= \overline{(a + b + c) + (-q_1)n} \\ &= \overline{a + b + c} \\ &= \overline{(a + b + c) + (-q_2)n} \\ &= \overline{a + (b + c - q_2n)} \\ &= \overline{a + (\overline{b+c})} \\ &= \overline{a + (b +_n c)} \\ &= a +_n (b +_n c). \end{aligned}$$

$\square$

Ähnlich wie die Addition in $\mathbb{Z}_n$ wurde die Multiplikation in $\mathbb{Z}_n$ wie folgt definiert:

$$x \cdot_n y = \overline{x \cdot y}.$$

Rechnen in $\mathbb{Z}_n$ ist auch unter dem Namen **modulare Arithmetik** bekannt. In der Literatur wird häufig die folgende Schreibweise verwendet.

Notation 3.5. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dann steht der Ausdruck

$$a \equiv b \pmod{n}$$

für

$$\bar{a} = \bar{b} \text{ (in } \mathbb{Z}_n\text{)}.$$

Übung 3.6. (Siehe [1, Beispiel 2.1].) Zeige, dass es unendlich viele natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gibt, für die die Gleichung

$$x^3 \equiv 2 \pmod{n}$$

eine Lösung in $\mathbb{Z}$ besitzt.

Übung 3.7. (Siehe [3, Seite 38].) Klaras Bus fährt immer zur vollen Stunde direkt vor ihrer Haustür. Im Moment ist es Viertel nach. Wie lange wird sie auf ihren Bus warten müssen, wenn sie zuerst noch eine DVD anschaut, die 202 Minuten dauert?

Übung 3.8. (Siehe [3, Seite 41].) Zeige, dass es keine ganze Zahl x gibt, die die Gleichung $x^3 - 4x + 2 = 0$ löst.

Um den euklidischen Algorithmus mit modularer Arithmetik in Verbindung zu bringen, ist das folgende Lemma nützlich.

Lemma 3.9 (Lemma von Bézout). (Siehe [2, Bemerkung 3.9].) *Seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann ist der größte gemeinsame Teiler von a und b als eine lineare Kombination von a und b über $\mathbb{Z}$ darstellbar, d.h. es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, sodass*

$$\alpha a + \beta b = \text{ggT}(a, b).$$

Übung 3.10. Vollziehe den Beweis vom Lemma von Bézout durch „Vorwärts- und Rückwärtsanwendung“ des euklidischen Algorithmus nach.

Übung 3.11. Finde das multiplikative Inverse von 7 in $\mathbb{Z}_{17}$, d.h. ein Element $a \in \mathbb{Z}_{17}$ mit $7 \cdot_{17} a = 1$.

(Hinweis: Wegen des Lemmas von Bézout gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $7\alpha + 17\beta = \text{ggT}(7, 17) = 1$. Für diese gilt insbesondere nach Lemma 3.3

$$\overline{7\alpha} = \overline{7\alpha + 17\beta} = \overline{1}.)$$

4 Ringe und Körper

In der Vorlesungen wurden die Begriffe der Ringe und Körper wie folgt eingeführt.

Definition 4.1. (Siehe [2, Definition 2.3 und Definition 2.4].) Ein Tripel $(R, +, \cdot)$ ist ein *Ring mit Eins*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $R \neq \emptyset$, also R ist eine nicht-leere Menge.
- $+$ und $\cdot$ sind binäre Verknüpfungen auf R , also Funktionen von $R \times R$ nach R .¹
- $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in R$.
- $(R, \cdot)$ ist ein Monoid, d.h. $\cdot$ ist assoziativ und es existiert ein Element $1 \in R$ mit

$$\forall x \in R: 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

- $1 \neq 0$.
- Die Distributivitätsgesetze gelten, also für alle $x, y, z \in R$ gilt:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

und

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z).$$

Das Element $1 \in R$ wird die *Eins* des Rings genannt.

Falls weiterhin $(R, \cdot)$ kommutativ ist, d.h.

$$\forall x, y \in R: x \cdot y = y \cdot x$$

erfüllt, so ist $(R, +, \cdot)$ ein *kommutativer Ring mit Eins*.

Beispiel 4.2. (i) Das Tripel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ die Standardaddition bzw. -multiplikation auf den reellen Zahlen bezeichnen, ist ein kommutativer Ring mit Eins.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ein kommutativer Ring mit Eins (vgl. Aufgabe 2.4). Hierbei ist die Eins das Element $1 \in \mathbb{Z}_n$ und das neutrale Element bezüglich der Addition ist durch $0 \in \mathbb{Z}_n$ gegeben.

(iii) Sei $R = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ und seien $+$ und $\cdot$ die Standardaddition bzw. -multiplikation auf $\mathbb{R}$. Dann ist $(R, +, \cdot)$ kein Ring mit Eins. Um dies zu verdeutlichen, überprüfen wir alle Bedingungen aus Definition 4.1:

- $R \neq \emptyset$, da R das Element 0 enthält.
- R ist abgeschlossen unter $+$ und $\cdot$, da $0 + 0 = 0 \in R$ und $0 \cdot 0 = 0 \in R$.
- $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Die Axiome sind leicht nachzurechnen, da R nur ein Element besitzt.

¹Hierbei ist $(x+y)$ eine Kurzschreibweise für $+(x, y)$. Analog steht $(x \cdot y)$ für $\cdot(x, y)$. Weiterhin werden zumeist unnötige Klammern weggelassen. Stichwort: Punkt- vor Strichrechnung.

- $(R, \cdot)$ ist ein Monoid: Die Assoziativität ist auch leicht nachzurechnen, da R nur das Element 0 besitzt. Weiterhin benötigen wir, dass ein Element $1 \in R$ existiert, für das gilt:

$$\forall x \in R: 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

Da R nur das Element 0 besitzt, müssen wir $1 = 0$ setzen. Sei nun $x \in R$. Dann gilt

$$1 \cdot x = 0 \cdot 0 = 0 = x.$$

Ebenso folgt auch $x \cdot 1 = x$. Damit ist diese Bedingung erfüllt.

- Die Distributivität ist auch leicht nachzurechnen: Seien $x, y, z \in R$. Dann gilt $x = y = z = 0$. Es folgt

$$x \cdot (y + z) = 0 \cdot (0 + 0) = 0 = (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Auch die andere Bedingung für Distributivität erhält man auf diese Weise.

Die einzige Bedingung, die $(R, +, \cdot)$ also nicht erfüllt, um ein Ring mit Eins zu sein, ist $1 \neq 0$.

Da der Begriff des Rings mit Eins eingeführt wurde, sollte auch erklärt werden, was ein Ring ohne Eins ist. Die folgende Definition gibt dies präzise wieder.

Definition 4.3. Ein Tripel $(R, +, \cdot)$ ist ein *Ring ohne Eins*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $R \neq \emptyset$.
- $+$ und $\cdot$ sind binäre Verknüpfungen auf R .
- $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in R$.
- $\cdot$ ist assoziativ.
- Für alle $x \in R$ gilt: Falls $\forall y \in R: xy = yx = y$ erfüllt ist, dann muss x gleich 0 sein.
- Die Distributivitätsgesetze gelten.

Falls weiterhin $(R, \cdot)$ kommutativ ist, so ist $(R, +, \cdot)$ ein *kommutativer Ring ohne Eins*.

Übung 4.4. Sei R eine einelementige Menge (also eine Menge der Kardinalität 1) und seien $+$ und $\cdot$ zwei beliebige binäre Verknüpfungen auf R . Zeige, dass $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ohne Eins ist.

(Hinweis: Erstelle zunächst die Verknüpfungstabellen für $+$ und $\cdot$.)

Übung 4.5. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Tripel, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $R \neq \emptyset$.
- $+$ und $\cdot$ sind binäre Verknüpfungen auf R .
- $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

- $\cdot$ ist assoziativ.
- Die Distributivitätsgesetze gelten.

Zeige, dass $(R, +, \cdot)$ genau dann ein Ring mit Eins ist, wenn er kein Ring ohne Eins ist.²

Definition 4.6. (Siehe [2, Definition 2.7].) Ein Tripel $(F, +, \cdot)$ ist ein *Körper*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $F \neq \emptyset$.
- $(F, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in F$.
- $\cdot$ ist eine binäre Verknüpfung auf F und $(F^\times, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe, wobei $F^\times = F \setminus \{0\}$.
- Die Distributivitätsgesetze gelten, also für alle $x, y, z \in F$ gilt:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

und³

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z).$$

Übung 4.7. Zeige, dass jeder Körper ein kommutativer Ring mit Eins ist.

Übung 4.8. Sei $(F, +, \cdot)$ ein Körper. Zeige, dass für alle $x \in F$ gilt:

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

Übung 4.9. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Es bezeichne 1 die Eins von R und 0 das neutrale Element bezüglich der Addition von R . Zeige, dass die folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

- $(R, +, \cdot)$ ist ein Körper.
- Für jedes $x \in R \setminus \{0\}$ gibt es ein $y \in R$ mit $x \cdot y = 1$.

Eine Eigenschaft der ganzen Zahlen ist die sogenannte Nullteilerfreiheit. Dies bedeutet, dass das Produkt zweier ganzer Zahlen, die beide ungleich 0 sind, auch ungleich 0 ist. Dieses Konzept lässt sich auf generelle Ringe mit Eins verallgemeinern.

Definition 4.10. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit eins. Dann ist R nullteilerfrei, wenn für alle $x, y \in R \setminus \{0\}$ gilt:

$$x \cdot y \neq 0.$$

Satz 4.11. Sei $(F, +, \cdot)$ ein Körper. Dann ist F nullteilerfrei.

²Äquivalent kannst du zeigen, dass $(R, +, \cdot)$ genau dann kein Ring mit Eins ist, wenn er ein Ring ohne Eins ist.

³Die zweite Bedingung für Distributivität folgt schon aus der ersten, da sowohl $+$ als auch $\cdot$ kommutativ sein müssen.

Beweis. Seien $x, y \in F$. Es ist folgende Aussage zu zeigen:

$$(x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Rightarrow x \cdot y \neq 0.$$

Wir beweisen stattdessen die Kontraposition:

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow \neg(x \neq 0 \wedge y \neq 0).$$

Wir nehmen also an, dass $x \cdot y = 0$ ist. Nun müssen wir

$$\neg(x \neq 0 \wedge y \neq 0)$$

zeigen. Dies ist äquivalent zu

$$x = 0 \vee y = 0,$$

was wiederum zu

$$x \neq 0 \Rightarrow y = 0$$

äquivalent ist. Es genügt also, nun die letzte Aussage zu zeigen. Wir nehmen deshalb zusätzlich an, dass $x \neq 0$ ist. Damit ist $x \in F^\times$. Da $(F^\times, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, gibt es ein element $a \in F^\times$ mit

$$a \cdot x = 1.$$

Mit der Annahme $x \cdot y = 0$ von oben erhalten wird also

$$0 = a \cdot 0 = a \cdot (x \cdot y) = (a \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y.$$

Dies impliziert $y = 0$, was zu zeigen war. □

5 Matrizen

Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $K^{m \times n}$ die Menge aller Matrizen mit m Zeilen und n Spalten (siehe [2, Beispiel 10.5]). Insbesondere bezeichnet $K^{n \times n}$ die Menge aller quadratischen Matrizen mit n Zeilen und n Spalten. Die Menge $K^{n \times n}$ ist unter Matrixmultiplikation abgeschlossen (siehe Aufgabe 4.4).

Zur Erinnerung: Für zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ ist das Produkt AB wie folgt definiert (siehe [2, Definition 7.5]). Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^n A_{ir} B_{rj}.$$

Hierbei bezeichnet A_{ij} den Eintrag der Matrix A in der i -ten Zeile und j -ten Spalte.

Satz 5.1. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in K^{n \times n}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $B \in K^{n \times n}$ ist $AB = B$. Dann gilt $A = I_n$. Insbesondere ist also I_n das eindeutige neutrale Element von $K^{n \times n}$ bezüglich der Multiplikation.*

Beweis. Für $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ bezeichne

$$E^{(k\ell)}$$

die $(n \times n)$ -Matrix, deren Eintrag in der k -ten Zeile und ℓ -ten Spalte gleich 1 ist und deren sonstigen Einträge alle gleich 0 sind. Es ist also

$$\left(E^{(k\ell)}\right)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \text{ und } j = \ell, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Dann gilt nach Voraussetzung für A

$$AE^{(jk)} = E^{(jk)}. \quad (5.1)$$

Nach Definition des Produktes zweier Matrizen erhalten wir

$$\left(AE^{(jk)}\right)_{ik} = \sum_{r=1}^n A_{ir} \left(E^{(jk)}\right)_{rk} = A_{ij},$$

da $\left(E^{(jk)}\right)_{rk}$ nur dann ungleich 0 ist, wenn $r = j$ gilt. Mit (5.1) folgt

$$A_{ij} = \left(E^{(jk)}\right)_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir $A_{ij} = (I_n)_{ij}$. Da i und j beliebig waren, folgt schon $A = I_n$, was zu zeigen war. □

Übung 5.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in K^{n \times n}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $B \in K^{n \times n}$ ist $BA = B$. Zeige: $A = I_n$.

Übung 5.3. (Siehe [1, Aufgabe 12.13 (a)].) Die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist wie folgt definiert. $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$F_{n+2} := F_n + F_{n+1}.$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Übung 5.4. (Siehe [1, Aufgabe 12.27].) Seien $U, W \subseteq \mathbb{R}^{3 \times 3}$ wie folgt definiert:

$$U := \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \forall i, j \in \{1, 2, 3\}: A_{i,j} = A_{4-i,4-j}\},$$

$$W := \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \forall i, j \in \{1, 2, 3\}: A_{i,j} = A_{4-i,j}\}.$$

(U ist die Menge der punktsymmetrischen reellen (3×3) -Matrizen und W ist die Menge der achsensymmetrischen reellen (3×3) -Matrizen.) Zeige, dass U und W Untervektorräume von $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ sind. Welche Matrizen sind in $U \cap W$ enthalten? Was ist die Dimension von $U \cap W$?

6 Vektorräume

In [2, Kapitel 2, § 1] wurden Vektorräume eingeführt. Weiterhin wurde in [2, Definition 2.12] definiert, was eine Basis eines Vektorraums ist.

Definition 6.1. Sei K ein Körper und sei V ein K -Vektorraum. Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ von V heißt *Basis* von V , wenn $\mathcal{B}$ linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V (d.h. $\text{span}(\mathcal{B}) = V$) ist.

Mithilfe einer Basis lässt sich die Dimension eines Vektorraums ermitteln.

Definition 6.2. Seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V . Dann ist die *Dimension* von V durch

$$\dim(V) = |\mathcal{B}|$$

definiert.

Die Dimension eines Vektorraums ist also die Kardinalität einer beliebigen Basis. Nach [2, Korollar 13.1] haben alle Basen eines Vektorraums dieselbe Kardinalität. Ein wichtiger Satz für die Konstruktion von Basen endlichdimensionaler Vektorräume ist der Basisergänzungssatz (siehe [2, Korollar 13.9]). Dieser besagt, dass jede linear unabhängige Menge zu einer Basis ergänzt werden kann.

Satz 6.3 (Basisergänzungssatz). *Sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum. Sei weiterhin $\mathcal{A} \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.*

Eine direkte Folgerung aus dem Basisergänzungssatz ist die Dimensionsformel (siehe [2, Korollar 13.10]).

Satz 6.4 (Dimensionsformel). *Sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum. Seien weiterhin W_1, W_2 Untervektorräume von V . Dann gilt*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Auch andere Sätze, die ähnlich zur Dimensionsformel sind, lassen sich aus dem Basisergänzungssatz folgern.

Lemma 6.5. *Sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum. Seien weiterhin U und W Untervektorräume von V . Dann gilt $\dim(U \cap W) \geq \dim(U) + \dim(W) - \dim(V)$.⁴*

Beweis. Sei $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis von $U \cap W$, wobei $m = \dim(U \cap W)$. Durch den Basisergänzungssatz lässt sich B zu einer Basis B_U von U und zu einer Basis B_W von W erweitern. Wir schreiben

$$B_U = \{b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_r\} \text{ und } B_W = \{b_1, \dots, b_m, d_1, \dots, d_s\},$$

wobei

$$m + r = \dim(U) \text{ und } m + s = \dim(W).$$

⁴Diese Aussage stammt aus [1, Aufgabe 12.31].

Betrachten wir nun

$$B' = B_U \cup B_W = \{b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_s\}.$$

Wir zeigen, dass B' linear unabhängig ist:

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_r, \gamma_1, \dots, \gamma_s \in K$ mit

$$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m + \beta_1 c_1 + \dots + \beta_r c_r + \gamma_1 d_1 + \dots + \gamma_s d_s = 0.$$

Dann gilt

$$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m + \beta_1 c_1 + \dots + \beta_r c_r = -\gamma_1 d_1 - \dots - \gamma_s d_s.$$

Nun ist die linke Seite eine Linearkombination von Elementen in B_U und die rechte Seite eine Linearkombination von Elementen in B_W . Daher liegt die linke Seite in U und die rechte Seite in W . Insbesondere liegt $-\gamma_1 d_1 - \dots - \gamma_s d_s$ damit sowohl in U also auch in W , also in $U \cap W$. Da B eine Basis von $U \cap W$ ist, existieren also $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ mit

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = -\gamma_1 d_1 - \dots - \gamma_s d_s.$$

Daraus folgt

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m + \gamma_1 d_1 + \dots + \gamma_s d_s = 0.$$

Dies wiederum impliziert

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \gamma_1 = \dots = \gamma_s = 0,$$

da B_W linear unabhängig ist. Insbesondere erhalten wir

$$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m + \beta_1 c_1 + \dots + \beta_r c_r = 0.$$

Da auch B_U linear unabhängig ist, gibt uns dies

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \beta_1 = \dots = \beta_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_s = 0,$$

was zeigt, dass B' linear unabhängig ist.

Da B' eine linear unabhängige Teilmenge von V ist, gilt

$$|B'| \leq \dim(V).$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim(U \cap W) + \dim(V) &\geq |B| + |B'| \\ &= m + (m + r + s) \\ &= (m + r) + (m + s) \\ &= |B_U| + |B_W| \\ &= \dim(U) + \dim(W). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\dim(U \cap W) \geq \dim(U) + \dim(W) - \dim(V).$$

□

Übung 6.6. Sei K ein Körper und sei V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Sei weiterhin $U \subseteq V$ ein Unterraum von V . Zeige, dass es einen Unterraum $W \subseteq V$ gibt, sodass

$$U + W = V \text{ und } U \cap W = \{0\}.$$

7 Basiswechsel

In [2, Script 14] wurde die Koordinaten-Spaltenmatrix eines Vektors bezüglich einer Basis eingeführt.

Definition 7.1. Sei K ein Körper und sei V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Sei weiterhin $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis von V . Für einen Vektor $\alpha \in V$ ist die *Koordinaten-Spaltenmatrix* von α bezüglich $\mathcal{B}$ durch

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei $x_1, \dots, x_n \in K$ mit

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n.$$

Die Koordinaten-Spaltenmatrix eines Vektors α besteht also aus den Koeffizienten der Linearkombination der Basisvektoren, die den Vektor α ergibt.

Beispiel 7.2. Betrachten wir den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

so erhalten wir für den Vektor

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die folgende Koordinaten-Spaltenmatrix bezüglich $\mathcal{B}$:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

denn

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der folgende Satz gibt uns die Möglichkeit, eine Basiswechselmatrix zu erstellen (siehe [2, Satz 15.3]).

Satz 7.3 (Basiswechsel). *Sei K ein Körper und sei V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Seien weiterhin $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ geordnete Basen von V . Die Matrix $P \in K^{n \times n}$ sei wie folgt definiert:*

$$P = (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n),$$

wobei für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die Spalte P_j durch die Koordinaten-Spaltenmatrix

$$P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$$

gegeben ist. Dann gilt für jedes $\alpha \in V$:

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(ii) $P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}} = [\alpha]_{\mathcal{B}'}$.

Die Matrix P in Satz 7.3 wird auch **Basiswechselmatrix** (von der Basis $\mathcal{B}'$ zu der Basis $\mathcal{B}$) genannt. Satz 7.3 besagt, dass das Produkt aus P und der Koordinaten-Spaltenmatrix eines Vektors α bezüglich $\mathcal{B}'$ die Koordinaten-Spaltenmatrix von α bezüglich $\mathcal{B}$ ergibt.

Übung 7.4. Betrachte den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit den Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und den Vektor

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechne die Koordinaten-Spaltenmatrix von α bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und bezüglich der Basis $\mathcal{B}'$.

(ii) Berechne die Basiswechselmatrix P von der Basis $\mathcal{B}'$ zu der Basis $\mathcal{B}$.

(iii) Verifiziere durch direktes Nachrechnen, dass $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ gilt.

8 Darstellungsmatrix

Seien K ein Körper, V und W zwei endlichdimensionale K -Vektorräume und $T: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Seien weiterhin $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von V bzw. W . Ähnlich wie beim Basiswechsel können wir uns fragen, wie die Koordinatenspalten-Matrizen von Vektoren in V mit denen ihrer Bilder in W zusammenhängen. Für diesen Zusammenhang wurde in [2, Definition 20.1] die **Darstellungsmatrix** $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ von T bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ definiert. Ihre Spalten bestehen aus den Koordinatenspalten-Matrizen bezüglich der Basis $\mathcal{B}'$ der Bilder der Vektoren in $\mathcal{B}$ unter der Abbildung T . Ist die Basis $\mathcal{B}$ also durch $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ gegeben, so lässt sich T also wie folgt darstellen:

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = ([T(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} \quad \cdots \quad [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'}).$$

Übung 8.1. Betrachte den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit den Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und die lineare Abbildung

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ y + 2z \end{pmatrix}.$$

(i) Berechne die Matrixdarstellung $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ von T bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.

- (ii) Sei $\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und, mithilfe der Darstellungsmatrix, $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$.

Die folgende Übung zeigt, dass Basiswechselmatrizen nur ein Spezialfall von Darstellungsmatrizen sind.

Übung 8.2. Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $\mathcal{B}$ sowie $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V . Sei weiterhin P die Basiswechselmatrix von der Basis $\mathcal{B}$ zur Basis $\mathcal{B}'$. Zeige:

$$P = [\text{id}_V]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

9 Determinanten

Auf Übungsblatt 13 wurden Determinanten von (2×2) - sowie (3×3) -Matrizen über allgemeinen Körpern eingeführt. Für allgemeine $(n \times n)$ -Matrizen lässt sich die Determinante mittels Unterdeterminanten berechnen. Dieses Verfahren wird im Folgenden am Beispiel einer (4×4) -Matrix erklärt.

Beispiel 9.1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Im ersten Schritt wählen wir eine Zeile oder Spalte, nach der wir die Determinante entwickeln möchten. Es eignen sich Zeilen oder Spalten, in denen möglichst viele Einträge gleich 0 sind. Wir wählen beispielsweise die vierte Zeile.

Im zweiten Schritt bilden wir die (4×4) -Vorzeichenmatrix:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

Eine allgemeine $(n \times n)$ -Vorzeichenmatrix für die Entwicklung der Determinante erhalten wir, indem wir den Eintrag in der ersten Zeile und ersten Spalte gleich + setzen und dann in den Zeilen und Spalten abwechselnd + und - eingetragen werden („Schachbrettmuster“).

Im dritten Schritt legen wir die Zeile der Vorzeichenmatrix, nach der wir die Determinante entwickeln, über die entsprechende Zeile der Ausgangsmatrix. Da wir die vierte Zeile gewählt haben, erhalten wir damit die folgende neue Zeile:

$$\left(-(-2) \quad +0 \quad -0 \quad +1 \right) = \left(2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right).$$

Im vierten Schritt werden die Einträge der neuen Zeile aus dem dritten Schritt mit den entsprechenden Unterdeterminanten multipliziert und die Ergebnisse miteinander addiert. Dies ergibt die Determinante der Ausgangsmatrix. Eine Unterdeterminante ist hierbei die Determinante der Matrix, die wir erhalten, indem wir die Zeile und die Spalte des zugehörigen Eintrags entfernen.

Beispielsweise steht der Eintrag 1 in der vierten Zeile und der vierten Spalte der Ausgangsmatrix. Streichen wir diese, ist die zugehörige Unterdeterminante durch

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir erhalten also

$$\det(A) = 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis kommt nun dadurch zustande, dass wir Determinanten einer (3×3) -Matrix explizit durch die gegebene Formel berechnen können:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2(4 + 12) + (4 + 8 + 24) = 68. \end{aligned}$$

Die allgemeinen Formeln für die Determinante einer $(n \times n)$ -Matrix A über einen Körper K werden im Folgenden erläutert. Hierbei ist A'_{ij} die Untermatrix von A , die wir erhalten, indem wir von A die i -te Zeile und die j -te Spalte streichen.

Entwicklung nach der i -ten Zeile: Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Dann ist

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A'_{ij}).$$

Entwicklung nach der j -ten Spalte: Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Dann ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A'_{ij}).$$

10 Lösungen zu Aufgabenblatt 14

In diesem letzten Abschnitt findet ihr die Lösungen zu Blatt 14 der Vorlesung.

14.1

Aufgabe: Seien K ein Körper, $a, b \in K$ und f ein lineares Funktional auf dem K -Vektorraum $K^{1 \times 2}$ gegeben durch $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Zu jeder der folgenden linearen Abbildungen $T: K^{1 \times 2} \rightarrow K^{1 \times 2}$ sei $g = T^t(f)$. Bestimme $g(x_1, x_2)$.

(a) $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$.

(b) $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$.

(c) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

Lösung: Nach Definition gelten $g = T^t(f) = f \circ T$ und

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$g(x_1, x_2) = T^t(f)(x_1, x_2) = (f \circ T)(x_1, x_2) = f(T(x_1, x_2)) = T(x_1, x_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Damit ist g wie folgt gegeben.

$$(a) \quad g(x_1, x_2) = (x_1, 0) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ax_1.$$

$$(b) \quad g(x_1, x_2) = (-x_2, x_1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = bx_1 - ax_2.$$

$$(c) \quad g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a + b)x_1 + (-a + b)x_2.$$

14.2

Aufgabe: Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Zeige: A^t ist genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist, und in diesem Fall gilt $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Lösung: Sei A invertierbar. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \left((A^t) (A^{-1})^t \right)_{ij} &= \sum_{k=1}^n (A^t)_{ik} \left((A^{-1})^t \right)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n (A)_{ki} (A^{-1})_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (A^{-1})_{jk} (A)_{ki} \\ &= (A^{-1}A)_{ji} \\ &= \delta_{ji} = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $A^t (A^{-1})^t = I_n$, weshalb A^t invertierbar ist und $(A^{-1})^t$ sein Inverses ist.

Sei nun A^t invertierbar. Nach obiger Argumentation ist dann auch $A = (A^t)^t$ invertierbar. $\square$

14.3

Aufgabe: Entscheide (mit Beweis) für jede der folgenden Wahlen eines Körpers K , zweier K -Vektorräume V_1 und V_2 sowie zweier Unterräume U_1 von V_1 und U_2 von V_2 , ob $V_1/U_1 \cong V_2/U_2$.

$$(a) K = \mathbb{R}, V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2, U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$(b) K = \mathbb{Q}, V_1 = \mathbb{Q}^4, V_2 = \mathbb{Q}^2, U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a+b \\ b \\ 2a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}, U_2 = \{0\}.$$

$$(c) K \text{ beliebig, } n \in \mathbb{N}, V_1 = V_2 = K^{n \times n}, U_1 = \{A \in V_1 \mid \forall i, j \in \mathbb{N}: (A)_{ij} = (A)_{ji}\}, U_2 = \{A \in V_1 \mid \forall i, j \in \mathbb{N}: (A)_{ij} = (A)_{(n+1-i)j}\}.$$

Lösung:

Da zwei K -Vektorräume genau dann isomorph zueinander sind, wenn sie dieselbe Dimension haben, genügt es, die Dimensionen der gegebenen Quotientenräume zu berechnen. Für diese lässt sich die Formel

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U).$$

verwenden.

$$(a) U_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, U_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Also $\dim(V_1/U_1) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(U_1) = 2 - 1 = 1$ und $\dim(V_2/U_2) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(U_2) = 2 - 1 = 1$. Damit sind die beiden Quotientenräume isomorph.

$$(b) U_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Also $\dim(V_1/U_1) = \dim(\mathbb{Q}^4) - \dim(U_1) = 4 - 2 = 2$ und $\dim(V_2/U_2) = \dim(\mathbb{Q}^2) - \dim(\{0\}) = 2 - 0 = 2$. Damit sind die beiden Quotientenräume isomorph.

(c) $\dim(V_1) = \dim(V_2) = n^2$. Damit hängt die Isomorphie der Quotientenräume nur davon ab, ob die Dimensionen von U_1 und U_2 übereinstimmen.

Für den Fall, dass n gerade ist, gilt

$$\dim(U_1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

und

$$\dim(U_2) = \frac{n^2}{2}.$$

Damit sind die Quotientenräume nicht isomorph.

Für den Fall, dass n ungerade ist, gilt

$$\dim(U_1) = \dim(U_2) = \frac{n(n+1)}{2}$$

und

$$\dim(U_2) = \frac{n^2}{2}.$$

Damit sind die Quotientenräume isomorph.

14.4

Aufgabe: Entscheide (mit Beweis) für jede der folgenden Wahlen eines Körpers K , eines K -Vektorraumes V , eines Unterraumes U von V sowie zweier Elemente $v, w \in V$, ob $v \in w + U$.

- (a) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{Q}$, $v = \sqrt{2}$ und $w = 3$.
- (b) K beliebig, $V = K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, $U = \{A \in V \mid \forall i, j \in \mathbb{N}: (A)_{ij} = (A)_{ji}\}$, $v = I_n$ und $w \in V$ gegeben durch $(w)_{ij} = 1$ für $i + j = n + 1$ und $(w)_{ij} = 0$ sonst.
- (c) $K = \mathbb{R}$, $V = \text{Fkt}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, also der $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, $U = \{f \in V \mid \exists c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: -c < f(x) < c\}$, v gegeben durch $v(x) = x^2$ und w gegeben durch $w(x) = x$.

Lösung: Da $v \in w + U$ nach Definition genau dann gilt, wenn $v - w \in U$, genügt es letztere Eigenschaft nachzuweisen oder zu widerlegen.

- (a) $v - w = \sqrt{2} - 3 \notin \mathbb{Q}$, da $\sqrt{2}$ irrational ist (siehe [1, Beispiel 6.7]). Daraus folgt $\sqrt{2} \notin 3 + \mathbb{Q}$. (Merke: $3 + \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.)
- (b) U ist die Menge aller symmetrischen Matrizen in $K^{n \times n}$. Einfaches Nachrechnen zeigt

$$(v - w)^t = I_n^t - w^t = I_n - w = v - w.$$

Damit ist $v - w$ eine symmetrische Matrix, also ein Element von U . Es folgt $v - w \in U$, also $v \in w + U$.

- (c) $v - w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - x = x(x - 1)$. Da U der Raum aller beschränkten reellwertigen Funktionen in einer Variablen ist, ist $v - w$ kein Element von U , denn für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$(v - w)(|c| + 1) = (|c| + 1)|c| > |c|.$$

Es folgt $v \notin w + U$.

Literatur

- [1] M. CARL. *Wie kommt man darauf?*, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017, doi:10.1007/978-3-658-18250-2.⁵
- [2] S. KUHLMANN. ‚Lineare Algebra I‘, Script zur Vorlesung, Universität Konstanz, Wintersemester 2019/2020.
- [3] C. LÖH, S. KRAUSS und N. KILBERTUS (Hrsg.). *Quod erat knobelandum*, 2. Auflage, Springer Spektrum, Berlin, 2019, doi:10.1007/978-3-662-58725-6.

⁵Ergänzendes Material verfügbar unter http://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/Zusatzmaterial.pdf?SGWID=0-0-45-1618128-p181063970.