Prädikatenlogik erster Stufe

Lothar Sebastian Krapp

Universität Konstanz, Fachbereich Mathematik und Statistik

12. August 2018

Sommerakademie Leysin, AG4

1. Aussagenlogik

2. Prädikatenlogik

Idee

Alltägliche wie mathematische Aussagen haben häufig zwei Gemeinsamkeiten:

Idee

Alltägliche wie mathematische Aussagen haben häufig zwei Gemeinsamkeiten: Sie besitzen einen Wahrheitswert (wahr/falsch) und sie lassen sich logisch verknüpfen.

Idee

Alltägliche wie mathematische Aussagen haben häufig zwei Gemeinsamkeiten: Sie besitzen einen Wahrheitswert (wahr/falsch) und sie lassen sich logisch verknüpfen. Dies versuchen wir in der Aussagenlogik zu formalisieren.

Regen und nasse Straßen

Seien A die Aussage „Es regnet." und B die Aussage „Die Straße ist nass."

Regen und nasse Straßen

Seien A die Aussage „Es regnet." und B die Aussage „Die Straße ist nass." Wir können Aussagen wie „Wenn es regnet, ist die Straße nass." oder „Die Straße ist nass, doch es regnet nicht." bilden.

Regen und nasse Straßen

Seien A die Aussage „Es regnet.“ und B die Aussage „Die Straße ist nass.“ Wir können Aussagen wie „Wenn es regnet, ist die Straße nass.“ oder „Die Straße ist nass, doch es regnet nicht.“ bilden.
In formaler Sprache lässt sich dies als $A \to B$ bzw. $B \land \neg A$ ausdrücken.

Sprache

In Aussagenlogik starten wir mit einer Sammlung von *Atomen* $A, B, C, \ldots$. Dies sind Aussagen, denen wir einen Wahrheitswert *wahr* oder *falsch* zuordnen können.

Sprache

In Aussagenlogik starten wir mit einer Sammlung von *Atomen* $A, B, C, \ldots$. Dies sind Aussagen, denen wir einen Wahrheitswert *wahr* oder *falsch* zuordnen können. Weiterhin verwenden wir eine *Sprache* bestehend aus *Junktoren* $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \perp\}$.

Sprache

In Aussagenlogik starten wir mit einer Sammlung von *Atomen* $A, B, C, \ldots$. Dies sind Aussagen, denen wir einen Wahrheitswert *wahr* oder *falsch* zuordnen können. Weiterhin verwenden wir eine *Sprache* bestehend aus *Junktoren* $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \perp\}$. Mit geeigneter Klammersetzung lassen sich nun aussagenlogische Sätze formen.

Beispielsätze

- $(A \vee B)$ bzw. $A \vee B$ – äußere Klammern können weggelassen werden.

Beispielsätze

- $(A \lor B)$ bzw. $A \lor B$ – äußere Klammern können weggelassen werden.
- $\neg(A \to (B \land C))$

Beispielsätze

- $(A \vee B)$ bzw. $A \vee B$ – äußere Klammern können weggelassen werden.
- $\neg(A \rightarrow (B \wedge C))$
- $(A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A))$

Beispielsätze

- $(A \vee B)$ bzw. $A \vee B$ – äußere Klammern können weggelassen werden.
- $\neg(A \rightarrow (B \wedge C))$
- $(A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A))$
- $\bot \vee B$

Wahrheitswerttabellen

Jeder Aussage kann mit folgender Wahrheitswerttabelle ein Wahrheitswert zugewiesen werden:

Wahrheitswerttabellen

Jeder Aussage kann mit folgender Wahrheitswerttabelle ein Wahrheitswert zugewiesen werden:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$\perp$
w	w	f	w	w	w	w	f
w	f	f	w	f	f	f	f
f	w	w	w	f	w	f	f
f	f	w	f	f	w	w	f

Wahrheitswerttabellen

Beispiel:

A	B	$(B \to A)$	$A \to (B \to A)$	$A \lor (B \to A)$
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	w	f
f	f	w	w	w

Wahrheitswerttabellen

Beispiel:

A	B	$(B \to A)$	$A \to (B \to A)$	$A \vee (B \to A)$
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	w	f
f	f	w	w	w

Eine logische Aussage, die unter jeder Belegung der Atome wahr ist, nennt man eine *Tautologie*.

Logische Schlüsse

Für eine formale Herleitung von Tautologien (oder generell Sätzen aus Mengen anderer Sätzen) benötigen wir ein System von *Deduktionsregeln*.

Logische Schlüsse

Für eine formale Herleitung von Tautologien (oder generell Sätzen aus Mengen anderer Sätzen) benötigen wir ein System von *Deduktionsregeln*. Falls Γ eine Menge von Sätzen ist und φ ein Satz, so schreiben wir

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ bzw. } \frac{\Gamma}{\varphi}$$

für „φ ist aus Γ herleitbar"

Logische Schlüsse

Für eine formale Herleitung von Tautologien (oder generell Sätzen aus Mengen anderer Sätzen) benötigen wir ein System von *Deduktionsregeln*. Falls Γ eine Menge von Sätzen ist und φ ein Satz, so schreiben wir

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ bzw. } \frac{\Gamma}{\varphi}$$

für „φ ist aus Γ herleitbar"
Zum Beispiel gilt $\{A \wedge B\} \vdash A$.

Natürliche Deduktionsregeln

$$\rightarrow\text{i:} \quad \frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\to\text{i: } \frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \to B}$$

$$\to\text{e: } \frac{A, A \to B}{B}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\rightarrow\text{i:}\ \frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

$$\rightarrow\text{e:}\ \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

$$\wedge\text{i:}\ \frac{A, B}{A \wedge B}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\rightarrow\text{i:}\ \frac{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}{A \rightarrow B}$$

$$\rightarrow\text{e:}\ \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

$$\wedge\text{i:}\ \frac{A, B}{A \wedge B}$$

$$\wedge\text{le:}\ \frac{A \wedge B}{A}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\to\text{i: } \frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \to B}$$

$$\to\text{e: } \frac{A, A \to B}{B}$$

$$\wedge\text{i: } \frac{A, B}{A \wedge B}$$

$$\wedge\text{le: } \frac{A \wedge B}{A}$$

$$\wedge\text{re: } \frac{A \wedge B}{B}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\to\text{i:}\ \frac{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}{A \to B}$$

$$\to\text{e:}\ \frac{A, A \to B}{B}$$

$$\wedge\text{i:}\ \frac{A, B}{A \wedge B}$$

$$\wedge\text{le:}\ \frac{A \wedge B}{A}$$

$$\wedge\text{re:}\ \frac{A \wedge B}{B}$$

$$\vee\text{li:}\ \frac{A}{A \vee B}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$\rightarrow$i: $\dfrac{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}{A \rightarrow B}$

$\rightarrow$e: $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$

$\wedge$i: $\dfrac{A, B}{A \wedge B}$

$\wedge$le: $\dfrac{A \wedge B}{A}$

$\wedge$re: $\dfrac{A \wedge B}{B}$

$\vee$li: $\dfrac{A}{A \vee B}$

$\vee$ri: $\dfrac{A}{B \vee A}$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\to\text{i: } \frac{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}{A \to B}$$

$$\to\text{e: } \frac{A, A \to B}{B}$$

$$\wedge\text{i: } \frac{A, B}{A \wedge B}$$

$$\wedge\text{le: } \frac{A \wedge B}{A}$$

$$\wedge\text{re: } \frac{A \wedge B}{B}$$

$$\vee\text{li: } \frac{A}{A \vee B}$$

$$\vee\text{ri: } \frac{A}{B \vee A}$$

$$\vee\text{e: } \frac{A \vee B, A \to C, B \to C}{C}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\to\text{i:}\ \frac{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}{A \to B}$$

$$\to\text{e:}\ \frac{A, A \to B}{B}$$

$$\wedge\text{i:}\ \frac{A, B}{A \wedge B}$$

$$\wedge\text{le:}\ \frac{A \wedge B}{A}$$

$$\wedge\text{re:}\ \frac{A \wedge B}{B}$$

$$\vee\text{li:}\ \frac{A}{A \vee B}$$

$$\vee\text{ri:}\ \frac{A}{B \vee A}$$

$$\vee\text{e:}\ \frac{A \vee B, A \to C, B \to C}{C}$$

$$\neg\text{i:}\ \frac{A \to \bot}{\neg A}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\to\text{i:}\ \frac{\begin{matrix}A\\ B\end{matrix}}{A \to B}$$

$$\to\text{e:}\ \frac{A, A \to B}{B}$$

$$\land\text{i:}\ \frac{A, B}{A \land B}$$

$$\land\text{le:}\ \frac{A \land B}{A}$$

$$\land\text{re:}\ \frac{A \land B}{B}$$

$$\lor\text{li:}\ \frac{A}{A \lor B}$$

$$\lor\text{ri:}\ \frac{A}{B \lor A}$$

$$\lor\text{e:}\ \frac{A \lor B, A \to C, B \to C}{C}$$

$$\neg\text{i:}\ \frac{A \to \bot}{\neg A}$$

$$\neg\text{e:}\ \frac{A, \neg A}{\bot}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\to\text{i: } \frac{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}{A \to B} \qquad \wedge\text{re: } \frac{A \wedge B}{B} \qquad \neg\text{i: } \frac{A \to \bot}{\neg A}$$

$$\to\text{e: } \frac{A, A \to B}{B} \qquad \vee\text{li: } \frac{A}{A \vee B} \qquad \neg\text{e: } \frac{A, \neg A}{\bot}$$

$$\wedge\text{i: } \frac{A, B}{A \wedge B} \qquad \vee\text{ri: } \frac{A}{B \vee A} \qquad \bot\text{e: } \frac{\bot}{A}$$

$$\wedge\text{le: } \frac{A \wedge B}{A} \qquad \vee\text{e: } \frac{A \vee B, A \to C, B \to C}{C}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\leftrightarrow\text{i: } \frac{A \to B, B \to A}{A \leftrightarrow B}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\leftrightarrow\text{i: } \frac{A \to B, B \to A}{A \leftrightarrow B}$$

$$\leftrightarrow\text{le: } \frac{A \leftrightarrow B}{A \to B}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$\leftrightarrow$i: $\dfrac{A \to B, B \to A}{A \leftrightarrow B}$

$\leftrightarrow$le: $\dfrac{A \leftrightarrow B}{A \to B}$

$\leftrightarrow$re: $\dfrac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\leftrightarrow\text{i: } \frac{A \rightarrow B, B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}$$

$$\leftrightarrow\text{le: } \frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B}$$

$$\leftrightarrow\text{re: } \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

$$\text{lem: } \frac{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B}{B}$$

Natürliche Deduktionsregeln

$$\leftrightarrow\text{i: } \frac{A \to B, B \to A}{A \leftrightarrow B}$$

$$\leftrightarrow\text{le: } \frac{A \leftrightarrow B}{A \to B}$$

$$\leftrightarrow\text{re: } \frac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$$

$$\text{lem: } \frac{A \to B, \neg A \to B}{B}$$

$$\text{ip: } \frac{\neg A \to \bot}{A}$$

Beispieldeduktion

Wir leiten per natürlicher Deduktion her:

$$A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$$

Gödelscher Vollständigkeitssatz

Gödelscher Vollständigkeitssatz

Der Gödelsche Vollständigkeitssatz besagt (unter anderem), dass jede Tautologie durch natürliche Deduktion herleitbar ist.

Idee

Logische Aussagen und Folgerungen werden oft über Objekte und deren Eigenschaften gemacht.

Idee

Logische Aussagen und Folgerungen werden oft über Objekte und deren Eigenschaften gemacht. Die Sprache der Aussagenlogik lässt noch keine solchen Formalisierungen zu, weshalb wir das Sprechen über Objekte und ihre Eigenschaften formalisieren müssen.

Idee

Logische Aussagen und Folgerungen werden oft über Objekte und deren Eigenschaften gemacht. Die Sprache der Aussagenlogik lässt noch keine solchen Formalisierungen zu, weshalb wir das Sprechen über Objekte und ihre Eigenschaften formalisieren müssen. (Wir beschränken uns auf eine sehr einfache Form der Prädikatenlogik mit unären Prädikaten und variablenfreien Termen.)

Unverheiratete Junggesellen

Wir führen folgende Prädikate ein:

Unverheiratete Junggesellen

Wir führen folgende Prädikate ein:
$M(x)$: „x ist ein Mann.“

Unverheiratete Junggesellen

Wir führen folgende Prädikate ein:
$M(x)$: „x ist ein Mann.“
$V(x)$: „x ist verheiratet.“

Unverheiratete Junggesellen

Wir führen folgende Prädikate ein:
$M(x)$: „x ist ein Mann.“
$V(x)$: „x ist verheiratet.“
$J(x)$: „x ist ein Junggeselle.“

Unverheiratete Junggesellen

Wir führen folgende Prädikate ein:
$M(x)$: „x ist ein Mann.“
$V(x)$: „x ist verheiratet.“
$J(x)$: „x ist ein Junggeselle.“
Nun können wir Aussagen prädikatenlogisch formalisieren, wobei wir über die Menge aller Menschen quantifizieren:

Unverheiratete Junggesellen

Wir führen folgende Prädikate ein:
$M(x)$: „x ist ein Mann.“
$V(x)$: „x ist verheiratet.“
$J(x)$: „x ist ein Junggeselle.“
Nun können wir Aussagen prädikatenlogisch formalisieren, wobei wir über die Menge aller Menschen quantifizieren:
$\forall x\ ((M(x) \wedge \neg V(x)) \to J(x))$:

Unverheiratete Junggesellen

Wir führen folgende Prädikate ein:
$M(x)$: „x ist ein Mann."
$V(x)$: „x ist verheiratet."
$J(x)$: „x ist ein Junggeselle."
Nun können wir Aussagen prädikatenlogisch formalisieren, wobei wir über die Menge aller Menschen quantifizieren:
$\forall x\ ((M(x) \land \neg V(x)) \to J(x))$:„Jeder unverheiratete Mann ist ein Junggeselle."

Unverheiratete Junggesellen

Wir führen folgende Prädikate ein:
$M(x)$: „x ist ein Mann."
$V(x)$: „x ist verheiratet."
$J(x)$: „x ist ein Junggeselle."
Nun können wir Aussagen prädikatenlogisch formalisieren, wobei wir über die Menge aller Menschen quantifizieren:
$\forall x\ ((M(x) \wedge \neg V(x)) \rightarrow J(x))$:„Jeder unverheiratete Mann ist ein Junggeselle."
$\exists x\ (V(x) \wedge J(x))$:

Unverheiratete Junggesellen

Wir führen folgende Prädikate ein:
$M(x)$: „x ist ein Mann."
$V(x)$: „x ist verheiratet."
$J(x)$: „x ist ein Junggeselle."
Nun können wir Aussagen prädikatenlogisch formalisieren, wobei wir über die Menge aller Menschen quantifizieren:
$\forall x\ ((M(x) \wedge \neg V(x)) \to J(x))$:„Jeder unverheiratete Mann ist ein Junggeselle."
$\exists x\ (V(x) \wedge J(x))$:„Es gibt einen verheirateten Junggesellen."

Sprache

Zusätzlich zu den logischen Symbolen aus der Aussagenlogik haben wir nun *Prädikatensymbole* $P_1, P_2, \ldots, P, Q, R$, *Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x, y, z$, *Quantoren* $\exists, \forall$ und *Terme* $t_1, \ldots, t_n, u, v, w$.

Sprache

Zusätzlich zu den logischen Symbolen aus der Aussagenlogik haben wir nun *Prädikatensymbole* $P_1, P_2, \ldots, P, Q, R$, *Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x, y, z$, *Quantoren* $\exists, \forall$ und *Terme* $t_1, \ldots, t_n, u, v, w$. Zulässige Formeln erhält man durch iterative Anwendung von logischen Verknüpfungen und Quantifizieren über eine bestimmte Variable.

Sprache

Zusätzlich zu den logischen Symbolen aus der Aussagenlogik haben wir nun *Prädikatensymbole* $P_1, P_2, \ldots, P, Q, R$, *Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x, y, z$, *Quantoren* $\exists, \forall$ und *Terme* $t_1, \ldots, t_n, u, v, w$. Zulässige Formeln erhält man durch iterative Anwendung von logischen Verknüpfungen und Quantifizieren über eine bestimmte Variable. Sind alle Variablen in einer Formel durch Quatoren *gebunden*, ist die Formel ein *prädikatenlogischer Satz*.

Beispielformeln

- $\forall A \; (A \wedge \exists x \; P(x))$

Beispielformeln

- $\forall A\ (A \wedge \exists x\ P(x))$ – keine Formel, da wir nur über Variablen quantifizieren dürfen.

Beispielformeln

- $\forall A\ (A \wedge \exists x\ P(x))$ – keine Formel, da wir nur über Variablen quantifizieren dürfen.
- $P(x) \to \forall y\ (P(y) \to \neg Q(y))$

Beispielformeln

- $\forall A \; (A \land \exists x \; P(x))$ – keine Formel, da wir nur über Variablen quantifizieren dürfen.
- $P(x) \to \forall y \; (P(y) \to \neg Q(y))$ – Formel, aber kein Satz, da x nicht gebunden ist.
- $\forall x \exists y \; (P(x) \to \exists z \; (P(z) \land \neg Q(y)))$

Beispielformeln

- $\forall A\ (A \wedge \exists x\ P(x))$ – keine Formel, da wir nur über Variablen quantifizieren dürfen.
- $P(x) \to \forall y\ (P(y) \to \neg Q(y))$ – Formel, aber kein Satz, da x nicht gebunden ist.
- $\forall x \exists y\ (P(x) \to \exists z\ (P(z) \wedge \neg Q(y)))$ – Satz, da alle Variablen nur gebunden auftreten.

Natürliche Deduktionsregeln

A: beliebige Formel mit freien Variablen, t Term, f Variable oder Term.

Natürliche Deduktionsregeln

A: beliebige Formel mit freien Variablen, t Term, f Variable oder Term.

$$\forall\text{i: } \frac{A(x)}{\forall x\ A(x)}$$

Natürliche Deduktionsregeln

A: beliebige Formel mit freien Variablen, t Term, f Variable oder Term.

$$\forall\text{i: } \frac{A(x)}{\forall x\ A(x)}$$

$$\forall\text{e: } \frac{\forall x\ A(x)}{A(f)}$$

Natürliche Deduktionsregeln

A: beliebige Formel mit freien Variablen, t Term, f Variable oder Term.

$$\forall\text{i: } \frac{A(x)}{\forall x\ A(x)}$$

$$\forall\text{e: } \frac{\forall x\ A(x)}{A(f)}$$

$$\exists\text{i: } \frac{A(t)}{\exists x\ A(x)}$$

Natürliche Deduktionsregeln

A: beliebige Formel mit freien Variablen, t Term, f Variable oder Term.

$$\forall\text{i: } \frac{A(x)}{\forall x\ A(x)}$$

$$\forall\text{e: } \frac{\forall x\ A(x)}{A(f)}$$

$$\exists\text{i: } \frac{A(t)}{\exists x\ A(x)}$$

$$\exists\text{e: } \frac{\exists x\ A(x), A(f) \to B}{B}$$

Beispieldeduktion

Wir leiten per natürlicher Deduktion her:

$$\forall x\ (P(x) \land Q(x)) \vdash P(1) \land \exists x\ Q(x)$$

Literatur

[1] J. Adámek, 'Einführung in die Logik', Vorlesungsskript, Technische Universität Braunschweig, Sommersemester 2010.

[2] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die mathematische Logik*, 5. Auflage (Spektrum, 2007).