Modelltheoretische Grundlagen – Syntax und Semantik

Lothar Sebastian Krapp

Universität Konstanz, Fachbereich Mathematik und Statistik

16. August 2018

Sommerakademie Leysin, AG4

1. Beweisbarkeit
2. Modelle und Erfüllbarkeit
3. Entscheidbarkeit

1 Beweisbarkeit

2 Modelle und Erfüllbarkeit

3 Entscheidbarkeit

Logisches Kalkül

Für das folgende logische Kalkül beschränken wir uns auf die adäquate aussagenlogische Sprache $\{\neg, \rightarrow\}$.

Logisches Kalkül

Für das folgende logische Kalkül beschränken wir uns auf die adäquate aussagenlogische Sprache $\{\neg, \to\}$.
Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache (der Prädikatenlogik erster Stufe). Wir definieren das formale System $K(\mathcal{L})$ als die Sammlung der folgenden Axiome und Schlussregeln:

1. $A \to (B \to A)$.
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.
3. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.
4. $\forall x.A \to A[t/x]$, wobei t keine freie Variable enthalten darf, die nach Einsetzen in A für x gebunden ist.
5. $(\forall x.(A \to B)) \to (A \to \forall x.B)$, wobei x nicht frei in A erscheint.

Logisches Kalkül

1. Aus A und $A \to B$ folgere B.
2. Aus A folgere $\forall x.A$.

Dabei sind A, B, C beliebige $\mathcal{L}$-Formeln, t ein beliebiger Term und x eine beliebige Variable.

Logisches Kalkül

1. Aus A und $A \to B$ folgere B.
2. Aus A folgere $\forall x.A$.

Dabei sind A, B, C beliebige $\mathcal{L}$-Formeln, t ein beliebiger Term und x eine beliebige Variable.
Sei Γ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln und sei A eine $\mathcal{L}$-Formel. Wir sagen, dass A aus Γ über $\mathcal{L}(K)$ *herleitbar* ist, falls es eine geordnete Liste $[A_1, \ldots, A_n]$ von $\mathcal{L}$-Formeln gibt, sodass $A_n = A$ und für jedes A_i einer der folgenden Fälle gilt:

Logisches Kalkül

1. Aus A und $A \to B$ folgere B.
2. Aus A folgere $\forall x.A$.

Dabei sind A, B, C beliebige $\mathcal{L}$-Formeln, t ein beliebiger Term und x eine beliebige Variable.

Sei Γ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln und sei A eine $\mathcal{L}$-Formel. Wir sagen, dass A aus Γ über $\mathcal{L}(K)$ *herleitbar* ist, falls es eine geordnete Liste $[A_1, \dots, A_n]$ von $\mathcal{L}$-Formeln gibt, sodass $A_n = A$ und für jedes A_i einer der folgenden Fälle gilt:

1. $A_i \in \Gamma$.
2. A_i ist ein $K(\mathcal{L})$-Axiom.
3. Es gibt $j, k < i$ mit $A_j = A_k \to A_i$.
4. Es gibt $j < i$ und eine Variable x mit $A_i = \forall x.A_j$.

Logisches Kalkül

1. Aus A und $A \to B$ folgere B.
2. Aus A folgere $\forall x.A$.

Dabei sind A, B, C beliebige $\mathcal{L}$-Formeln, t ein beliebiger Term und x eine beliebige Variable.
Sei Γ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln und sei A eine $\mathcal{L}$-Formel. Wir sagen, dass A aus Γ über $\mathcal{L}(K)$ *herleitbar* ist, falls es eine geordnete Liste $[A_1, \ldots, A_n]$ von $\mathcal{L}$-Formeln gibt, sodass $A_n = A$ und für jedes A_i einer der folgenden Fälle gilt:

1. $A_i \in \Gamma$.
2. A_i ist ein $K(\mathcal{L})$-Axiom.
3. Es gibt $j, k < i$ mit $A_j = A_k \to A_i$.
4. Es gibt $j < i$ und eine Variable x mit $A_i = \forall x.A_j$.

Wir schreiben $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}(K)} A$ und nennen $[A_1, \ldots, A_n]$ einen *Beweis* von A aus Γ über $\mathcal{L}(K)$.

Konsistenz

Für $\vdash_{K(\mathcal{L})}$ schreiben wir von nun an $\vdash$.

Konsistenz

Für $\vdash_{K(\mathcal{L})}$ schreiben wir von nun an $\vdash$.

Definition

Seien $\mathcal{L}$ eine Sprache und Γ eine Menge von $\mathcal{L}$-Sätzen. Γ heißt *konsistent*, falls es keinen $\mathcal{L}$-Satz φ gibt, für den sowohl $\Gamma \vdash \varphi$ als auch $\Gamma \vdash \neg\varphi$ gilt.

1 Beweisbarkeit

2 Modelle und Erfüllbarkeit

3 Entscheidbarkeit

Erfüllbarkeit

Fixiere eine Sprache $\mathcal{L}$ und eine Menge von $\mathcal{L}$-Sätzen Γ.

Satz

Γ ist genau dann erfüllbar, wenn es konsistent ist.

Erfüllbarkeit

Fixiere eine Sprache $\mathcal{L}$ und eine Menge von $\mathcal{L}$-Sätzen Γ.

Satz

Γ ist genau dann erfüllbar, wenn es konsistent ist.

Kompaktheitssatz

Γ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.

Gödelscher Vollständigkeitssatz

Fixiere eine Sprache $\mathcal{L}$ und eine Menge von $\mathcal{L}$-Sätzen Γ.

Gödelscher Vollständigkeitssatz

Fixiere eine Sprache $\mathcal{L}$ und eine Menge von $\mathcal{L}$-Sätzen Γ.

Definition

Sei φ ein $\mathcal{L}$-Satz. Wir sagen, dass φ eine *logische Konsequenz* von Γ ist, falls für alle Modelle $\mathcal{M} \models \Gamma$ gilt, dass $\mathcal{M} \models \varphi$.

Gödelscher Vollständigkeitssatz

Fixiere eine Sprache $\mathcal{L}$ und eine Menge von $\mathcal{L}$-Sätzen Γ.

Definition

Sei φ ein $\mathcal{L}$-Satz. Wir sagen, dass φ eine *logische Konsequenz* von Γ ist, falls für alle Modelle $\mathcal{M} \models \Gamma$ gilt, dass $\mathcal{M} \models \varphi$.

Gödelscher Vollständigkeitssatz, 1930

Sei φ ein $\mathcal{L}$-Satz. Dann gilt:
$\Gamma \vdash \varphi$ genau dann, wenn $\Gamma \models \varphi$.

Gödelscher Vollständigkeitssatz

Fixiere eine Sprache $\mathcal{L}$ und eine Menge von $\mathcal{L}$-Sätzen Γ.

Definition

Sei φ ein $\mathcal{L}$-Satz. Wir sagen, dass φ eine *logische Konsequenz* von Γ ist, falls für alle Modelle $\mathcal{M} \models \Gamma$ gilt, dass $\mathcal{M} \models \varphi$.

Gödelscher Vollständigkeitssatz, 1930

Sei φ ein $\mathcal{L}$-Satz. Dann gilt:
$\Gamma \vdash \varphi$ genau dann, wenn $\Gamma \models \varphi$.

Der Gödelsche Vollständigkeitssatz postuliert die Äquivalenz zwischen syntaktischer Beweisbarkeit und semantischer Gültigkeit eines gegebenen Satzes.

1. Beweisbarkeit
2. Modelle und Erfüllbarkeit
3. Entscheidbarkeit

Entscheidbarkeit

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Interpretation. Wir nennen $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ die Menge der $\mathcal{L}$-Sätze, welche $\mathcal{A}$ erfüllt, und bezeichnen sie als die *vollständige Theorie* von $\mathcal{A}$.

Entscheidbarkeit

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Interpretation. Wir nennen $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ die Menge der $\mathcal{L}$-Sätze, welche $\mathcal{A}$ erfüllt, und bezeichnen sie als die *vollständige Theorie* von $\mathcal{A}$.

Definition

Γ heißt *entscheidbar*, falls es einen Algorithmus gibt, der für einen beliebigen $\mathcal{L}$-Satz φ in endlicher Zeit ausgibt, ob $\Gamma \models \varphi$ oder $\Gamma \not\models \varphi$. Eine $\mathcal{L}$-Interpretation $\mathcal{A}$ heißt entscheidbar, falls $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ entscheidbar ist.

Tarskis Entscheidungsalgorithmus

Sei $\mathcal{L} = (+, -, \cdot, 0, 1, <, =)$, die Sprache der angeordneten Ringe. Sei $\mathcal{R}$ die $\mathcal{L}$-Interpretation $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <, =)$.

Tarskis Entscheidungsalgorithmus

Sei $\mathcal{L} = (+, -, \cdot, 0, 1, <, =)$, die Sprache der angeordneten Ringe. Sei $\mathcal{R}$ die $\mathcal{L}$-Interpretation $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <, =)$.

Satz (Tarski, 1948)

$\mathcal{R}$ ist entscheidbar.

Tarskis Entscheidungsalgorithmus

Sei $\mathcal{L} = (+, -, \cdot, 0, 1, <, =)$, die Sprache der angeordneten Ringe. Sei $\mathcal{R}$ die $\mathcal{L}$-Interpretation $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <, =)$.

Satz (Tarski, 1948)

$\mathcal{R}$ ist entscheidbar.

Tarskis Entscheidungsalgorithmus basiert auf einem Verfahren, das entscheidet, ob gegebene polynomiale Gleichungen und Ungleichungen Lösungen besitzen.

Tarskis Entscheidungsalgorithmus

Sei $\mathcal{L} = (+, -, \cdot, 0, 1, <, =)$, die Sprache der angeordneten Ringe. Sei $\mathcal{R}$ die $\mathcal{L}$-Interpretation $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <, =)$.

Satz (Tarski, 1948)

$\mathcal{R}$ ist entscheidbar.

Tarskis Entscheidungsalgorithmus basiert auf einem Verfahren, das entscheidet, ob gegebene polynomiale Gleichungen und Ungleichungen Lösungen besitzen. Dieser Algorithmus gibt uns einen automatischen Theorembeweiser für Aussagen über die reellen Zahlen in der Sprache angeordneter Ringe.

Tarskis Exponentialfunktionsproblem

Sei $\mathcal{L}_{\mathsf{exp}} = (+, -, \cdot, 0, 1, <, =, \mathsf{exp})$, wobei exp eine einstellige Funktion ist. Sei $\mathcal{R}_{\mathsf{exp}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, =, \mathsf{exp})$, wobei $\mathsf{exp} : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Tarskis Exponentialfunktionsproblem

Sei $\mathcal{L}_{\text{exp}} = (+, -, \cdot, 0, 1, <, =, \text{exp})$, wobei exp eine einstellige Funktion ist. Sei $\mathcal{R}_{\text{exp}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, =, \text{exp})$, wobei $\text{exp} : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Frage (Tarski, 1948): Ist $\mathcal{R}_{\text{exp}}$ entscheidbar?

Tarskis Exponentialfunktionsproblem

Sei $\mathcal{L}_{\text{exp}} = (+, -, \cdot, 0, 1, <, =, \text{exp})$, wobei exp eine einstellige Funktion ist. Sei $\mathcal{R}_{\text{exp}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, =, \text{exp})$, wobei $\text{exp} : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Frage (Tarski, 1948): Ist $\mathcal{R}_{\text{exp}}$ entscheidbar?

Die Frage ist bis heute ungelöst. Es wurden Entscheidungsalgorithmen für $\mathcal{R}_{\text{exp}}$ vorgeschlagen. Die Funktionalität dieser beruht jedoch auf der Annahme noch nicht bewiesener Vermutungen. (Siehe dazu [4].)

Grenzen der Entscheidbarkeit

Sei $\mathcal{L} = (+, \cdot, 1, 0, \leq)$.

Satz

Die $\mathcal{L}$-Interpretation $(\mathbb{N}, +, \cdot, 1, 0, \leq)$ ist nicht entscheidbar.

Grenzen der Entscheidbarkeit

Sei $\mathcal{L} = (+, \cdot, 1, 0, \leq)$.

Satz

Die $\mathcal{L}$-Interpretation $(\mathbb{N}, +, \cdot, 1, 0, \leq)$ ist nicht entscheidbar.

Dies ist eine direkte Folgerung aus den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen.

Literatur

[1] J. Adámek, 'Einführung in die Logik', Vorlesungsskript, Technische Universität Braunschweig, Sommersemester 2010.

[2] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die mathematische Logik*, 5. Auflage (Spektrum, 2007).

[3] J. Koenigsmann, 'Lecture Notes on Logic', Vorlesungsskript, University of Oxford, 2010.

[4] L. S. Krapp, 'O-minimal exponential fields and their residue fields' (extended abstract), *Oberwolfach Reports* 13 (2016) 3357–3359, doi:10.4171/OWR/2016/60.

[5] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry* (RAND Corporation, Santa Monica, CA, 1948).