Von Tarski, exp, den reellen Zahlen und dem größten Exponentialkörper der Welt

oder: Das Entscheidbarkeitsproblem des reellen Exponentialkörpers

Lothar Sebastian Krapp

Universität Konstanz, Fachbereich Mathematik und Statistik

23. März 2017

Was ist Modelltheorie?

- Teilgebiet der mathematischen Logik
- Analyse von mathematischen Annahmen (Axiomen) und Strukturen, die diese erfüllen
- Axiome sind in einer formal-logischen Sprache formuliert

Beispiel: Die reellen Zahlen

- Reelle Zahlen $\mathbb{R}$: $5, -3, \frac{1}{7} = 0.142\ldots, \sqrt{2} = 1.414\ldots, \pi = 3.141\ldots, \mathrm{e} = 2.718\ldots$.
- Formale Sprache: Logische Verknüpfungen („und“, „oder“, „nicht“, „Wenn. . ., dann“ „Es existiert ein x, für das gilt“, „Für alle x gilt“), nicht-logische Symbole $(+, \cdot, 0, 1, <, =)$
- Beispiel für Axiome: „Für alle x, y gilt: $x + y = y + x$.“, „Für alle x gilt: Es existiert ein y, für das gilt $x + y = 0$.“

Das Entscheidbarkeitsproblem

- Problemstellung: Gibt es einen Algorithmus, der für eine formal-logische Aussage über die reellen Zahlen entscheidet, ob die Aussage wahr oder falsch ist?
- Antwort: Ja (Tarski, 1950er) – solange nur die nicht-logischen Symbole $(+, \cdot, 0, 1, <, =)$ benutzt werden
- Beispiel für Aussage, die entscheidbar ist: „Jede positive Zahl hat eine Quadratwurzel." – „Für jedes x gilt: Wenn $x > 0$, dann existiert ein y, für das gilt $y \cdot y = x$."
- Beispiel für Aussage, die nicht entscheidbar ist: „Es gibt unendlich viele Primzahlen."
- $\Longrightarrow$ nicht jede wahre Aussage ist entscheidbar

Der reelle Exponentialkörper

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp, 0, 1, <, =)$
- $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ – Exponenzieren als nächste natürliche Operation nach Addition und Multiplikation
- $a^b = \exp(\log(a) \cdot b)$
- Beispiel für Axiom: „Für alle x und für alle y gilt: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

Entscheidbarkeitsproblem des reellen Exponentialkörpers

- Tarski (1950er): Ist der reelle Exponentialkörper entscheidbar?
- 1980er: Vorschläge eines Algorithmus, der jedoch möglicherweise nicht funktioniert.
- 1996: Vorschlag eines Algorithmus, der funktioniert, jedoch nur wenn die Vermutung von Schanuel angenommen wird.

Die Vermutung von Schanuel

- Vermutung über Verhältnis zwischen Zahlen $a, b, \ldots$ und ihren Exponenten $\mathrm{e}^{a}, \mathrm{e}^{b}, \ldots$
- erste Erwähnung: 1960er
- Allgemein als wahr angenommen, aber noch nicht bewiesen
- Fields-Madaillen-Problem
- Tausende mathematische Aussagen basieren auf Annahme der Vermutung

Ein mathematisches Dilemma

- Angewandter Mathematiker: Entscheidbarkeitsalgorithmus funktioniert wahrscheinlich, ist aber zu komplex für eine Implementierung
- Theoretischer Mathematiker: Wir können nicht mit aller Sicherheit sagen, dass der Algorithmus funktioniert.

Fragen und Diskussion

- Warum wird Grundlagenforschung betrieben?
- Sollten an Schule und Universität eher die Ideen oder die Anwendungen der Mathematik vermittelt werden?
- Mathematik im Alltag: Ein Werkzeug oder eine Denkweise?