Konstruktive und nicht-konstruktive Beweise

Lothar Sebastian Krapp

Universität Konstanz, Fachbereich Mathematik und Statistik

28. April 2017

1. Hintergrund
2. Beispiele
3. Erkenntnisse

1. Hintergrund
2. Beispiele
3. Erkenntnisse

Hintergrund

- höhere Mathematik beschäftigt sich weitestgehend mit Beweisen von Aussagen
- viele Aussagen sind Existenzaussagen: „Es existiert ein Objekt x mit der Eigenschaft P."
- grundsätzlich zwei verschiedene Beweisarten: konstruktiv (z.B. durch Algorithmus oder Eigenschaftennachweis) und nicht-konstruktiv (z.B. durch Widerspruchsbeweis oder vollständige Fallunterscheidung)

Beweisarten

- Konstruktiver Beweis:
  - „Hier ist Objekt x. Jetzt zeige ich, dass es die Eigenschaft P erfüllt."
  - „Hier ist ein Algorithmus, der x ausgibt. Jetzt zeige ich, dass nach dessen Ausführung P von x erfüllt wird."
- Nicht-konstruktiver Beweis:
  - „Nehme an, kein x erfüllt P. Dies führt zu einem Widerspruch."
  - „Ich habe zwei Objekte x_1 und x_2. Falls x_1 schon P erfüllt, bin ich fertig. Falls x_1 dies nicht tut, zeige ich, dass x_2 dann P erfüllen muss."

Existenz unendlich vieler Primzahlen

- Existenzaussage: Es gibt eine Menge x, für die gilt „x besteht aus Primzahlen und ist unendlich groß.“.
- Nicht-konstruktiver Beweis durch Widerspruch: Nehme an, es gebe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$, wobei p_n die größte ist. Dann ist $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ eine Primzahl, die größer als p_n ist – ein Widerspruch.
- Es gibt keine Möglichkeit, aus diesem Beweis x zu konstruieren.

Irrationale Potenz rationaler Basis

- Existenzaussage: Es gibt ein Paar (a, b) mit der Eigenschaft, dass a rational, b irrational und a^b irrational ist.
- Nicht-konstruktiver Beweis durch Fallunterscheidung:

Fall 1: Seien $a = 2$ und $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Falls $a^b = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ irrational ist, sind wir fertig. Ist $2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ rational, so...

Fall 2: Seien $a = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ und $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dann ist $a^b = \left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ irrational, wie gewünscht.

- Es gibt keine Möglichkeit, aus diesem Beweis das Paar (a, b) genau zu bestimmen.

Nullstelle von Polynom

- Existenzaussage: Es gibt eine reelle Zahl a mit der Eigenschaft $3a - 1 = 0$.
- Konstruktiver Beweis durch Eigenschaftennachweis: Betrachte $a = \frac{1}{3}$. Rechne $3a - 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 1 - 1 = 0$, wie gewünscht.
- Nicht-konstruktiver Beweis durch Zwischenwertsatz: Betrachte $f(x) = 3x - 1$. Diese Funktion ist stetig. Weiterhin ist $f(0) = -1$ und $f(1) = 2$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert $a \in (0, 1)$ mit $f(a) = 0$.
- ABER: Zwischenwertsatz führt zu konstruktivem Algorithmus, der als Lösung $a = 0.333\ldots$ annähert. (siehe Tafel)

Existenz transzendenter Zahl

- Existenzaussage: Es gibt eine reelle transzendente Zahl, also eine reelle Zahl t, sodass für jedes Polynom $p(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ gilt: $p(t) \neq 0$.
- Nicht-konstruktiver Beweis durch Abzählbarkeitsargument: Es gibt nur abzählbar viele Polynome in $\mathbb{Q}[x]$, von denen jedes endlich viele reelle Nullstellen besitzt. Ergo gibt es nur abzählbar viele nicht-transzendente (algebraische) Zahlen. Da es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt, muss es eine reelle transzendente geben.
- ABER: Abzählbarkeitsargument kann für konstruktive Diagonalmethode genutzt werden.

Existenz transzendenter Zahl

Vollständige Liste aller Nullstellen aller Polynome in $\mathbb{Q}[x]$:

1. $1.\mathbf{4}142135\ldots$
2. $0.3\mathbf{3}33333\ldots$
3. $4.54\mathbf{5}4545\ldots$
4. $2.999\mathbf{9}999\ldots$

$\vdots$

Konstruktion von t: die n-te Nachkommastelle ist von der n-ten Nachkommastelle der n-ten Zahl auf der Liste verschieden. Z.B.: $t = 0.5640\ldots$.

Erkenntnisse und Fragen

- Nicht-konstruktive Beweise können durch Analyse der eingehenden Argumente zu konstruktiven Beweisen führen.
- Abstrakte Objekte wie reelle Zahlen können durch Algorithmus „konstruiert“ werden.
- ABER: Was bedeutet es, dass wir ein abstraktes Objekt konstruiert haben?

Konstruierbar?

- Numeriker: „Wenn ich mit einem Computer eine Zahl nach endlicher Zeit beliebig genau annähern kann, dann *kenne* ich sie. Das gefundene t ist eine legitime transzendente Zahl, ebenso wie π."
- Analytiker: „Reelle Zahlen sind als Grenzwerte von Cauchyfolgen definiert. Nur, wenn ich die Folgevorschrift verstanden habe, dann *kenne* ich die Zahl."

Was denkt ihr?

...