
Übungsblatt 1 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (0P) (SINGULAR) Falls Du einen Computer zur Verfügung hast, installiere dort das frei erhältliche Computeralgebrasystem SINGULAR [<http://www.singular.uni-kl.de/>]. Andernfalls verschaffe Dir Zugang zu in einem Rechnerpool, auf dem SINGULAR installiert ist, etwa den PhyMa-Pool [<http://www.phyma.uni-konstanz.de/>]. Versuche nach der Installation, Dich ein wenig mit dem Programm vertraut zu machen, etwa indem Du [<http://www.mathematik.uni-kl.de/~keilen/download/LectureNotes/singular-introduction.pdf>] durcharbeitest.

Aufgabe 2. (4P) (Algebren als Ringhomomorphismen) Seien R und A Ringe. Zeige, dass die Zuordnungen

$$\bullet \mapsto \begin{pmatrix} R \rightarrow A \\ r \mapsto r \bullet 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} R \times A \rightarrow A \\ (r, a) \mapsto \alpha(r)a \end{pmatrix} \leftarrow \alpha$$

eine Bijektion vermitteln zwischen der Menge der Skalarmultiplikationen $R \times A \rightarrow A$, die A zu einer R -Algebra machen, und der Menge der Ringhomomorphismen $R \rightarrow A$.

Aufgabe 3. (4P) (Eine Charakterisierung von Radikalidealen) Sei A ein kommutativer Ring und I ein Ideal. Zeige $I = \sqrt{I} \iff \forall a \in A : (a^2 \in I \implies a \in I)$.

Aufgabe 4. (4P) (Polynome in mehreren Variablen und Nullstellen) Sei C ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige:

- (a) Es gibt kein Polynom $f \in C[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$, das auf ganz C^n verschwindet.
- (b) Für jedes $f \in C[X_1, \dots, X_n] \setminus C$ gibt es ein $x \in C^n$ mit $f(x) = 0$.

Aufgabe 5. (4P) (Rechenregeln für das Radikal) Sei A ein kommutativer Ring und I und J ein Ideal in A . Zeige oder finde ein Gegenbeispiel für:

- (a) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$
- (b) $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$
- (c) $\sqrt{I} = A \iff I = A$
- (d) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$

Abgabe bis Mittwoch, den 28. Oktober 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.