Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2015/2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 12 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (3P) (Faktorisierung homogener Polynome)

Zeige, dass in $C[X, Y]$ jedes homogene Polynom ein Produkt von Linearformen ist.

Aufgabe 2. (6P) (Projektive Geraden)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und für $i \in \{0, \dots, n\}$

$$\pi \colon C^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n, (x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_n],$$
$$\varphi_i \colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n, \ (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_i : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$$

und $U_i := \varphi_i(\mathbb{A}^n)$. Wir nennen die φ_i die *affinen Karten* von $\mathbb{P}^n$.

(a) Zeige $\mathbb{P}^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$.

(b) Zeige, dass φ_i für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{A}^n$ und U_i ist.

(c) Sei $\emptyset \neq \ell \subseteq \mathbb{P}^n$. Zeige dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

 (i) ℓ ist irreduzibel (bzgl. der Zariskitopologie auf $\mathbb{P}^n$) und für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ ist $\varphi_i^{-1}(\ell)$ leer oder eine Gerade in $\mathbb{A}^n$, das heißt von der Form $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in C\}$ für gewisse $x, y \in \mathbb{A}^n$ mit $x \neq y$.

 (ii) Es gibt einen zweidimensionalen Untervektorraum L des C-Vektorraums C^{n+1} mit
$$\ell = \pi(L \setminus \{0\}).$$

 Gelten diese äquivalenten Bedingungen, so nennen wir ℓ eine *Gerade* in $\mathbb{P}^n$.

(d) Zeige, dass sich in $\mathbb{P}^2$ zwei verschiedene Geraden jeweils in genau einem Punkt schneiden.

(e) Zeige, dass zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{P}^2$ genau eine Gerade definieren.

Aufgabe 3. (4P) (Affine Karten und projektive Varietäten)

Zeige, dass eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{P}^n$ des n-dimensionalen projektiven Raumes genau dann eine projektive K-Varietät ist, wenn ihr Schnitt mit jeder der $n + 1$ affinen Karten eine affine K-Varietät des $\mathbb{A}^n$ ist (das heißt mit der Notation von Aufgabe 2: $\varphi_i^{-1}(M \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n$ ist eine affine K-Varietät für alle $i \in \{0, \dots, n\}$).

Aufgabe 4. (3P) (Beispiele projektiver Varietäten I)

Seien V und W K-Untervarietäten von $\mathbb{P}^n$ mit $V \cap W = \emptyset$. Zeige, dass die Vereinigung aller Geraden $g \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $g \cap V \neq \emptyset \neq g \cap W$ eine K-Untervarietät von $\mathbb{P}^n$ ist.

Abgabe bis Mittwoch, den 27. Januar 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.