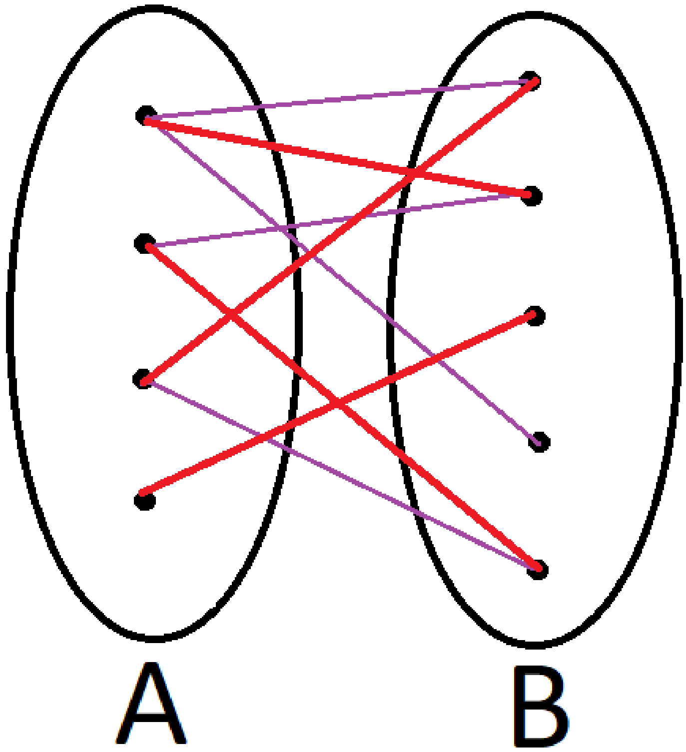
Der Satz von Gale und Shapley

Proseminar Graphentheorie

Dennis Zisselsberger



Prof. Schweighofer, Tom-Lukas Kriel

Universität Konstanz

Inhaltsverzeichnis

1 Situation 1

2 Grundlagen 1

3 Definitionen I 1

4 Wiederholung Heiratssatz 2

5 Definitionen II 3

6 Satz von Gale & Shapley 4

7 Folgerungen aus dem Satz von Gale & und Shapley 5

8 Literatur 6

1 Situation

In einer Woche findet ein Ball statt und es gibt noch einige Personen, die noch keinen Tanzpartner gefunden haben. Es sind vier Männer und fünf Frauen. Sie heißen Anton, Bert, Claus, Dan, Emelie, Franzi, Gisela, Hildegard und Inge(*In den Graphen jeweils abgekürzt durch ihre Anfangsbuchstaben.*). Ein Tanzpaar besteht dabei stets aus einem Mann und einer Frau.
Dabei kommen folgende Fragen auf:

1. Findet jeder einen Tanzpartner?
2. Ist jeder mit seinem Tanzpartner zufrieden?

2 Grundlagen

Sei von nun an $G = (V, E)$ ein Graph mit Eckenmenge V und Kantenmenge E.

3 Definitionen I

Ein Graph heißt **bipartit**, wenn eine Partition existiert so, dass verschiedene Endecken einer jeden Kante in der anderen der beiden Partitionsklassen liegen.(1)
Zwei Kanten sind **benachbart**, wenn sie eine gemeinsame Endecke haben.(2)
Eine **unabhängige** Teilmenge ist eine Teilmenge, deren Elemente paarweise nicht benachbart sind.(3)
Eine **Paarung** oder **Matching** ist eine Menge unabhängiger Kanten.(4)

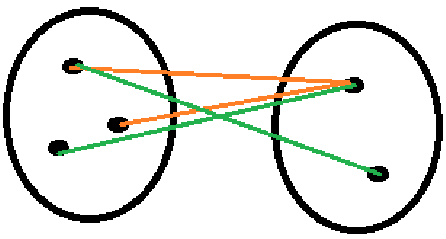


Abb. 1: Dieser Graph stellt eine bipartite(1) Paarung(4) dar. Dabei sind die orangenen Linien benachbart(2) und die grünen Linien unabhängig(3).

4 Wiederholung Heiratssatz

Der Heiratssatz besagt:

$$\forall S \subset A : |N(S)| \geq |S| \Leftrightarrow G \text{ enthält eine Paarung von } A \tag{1}$$

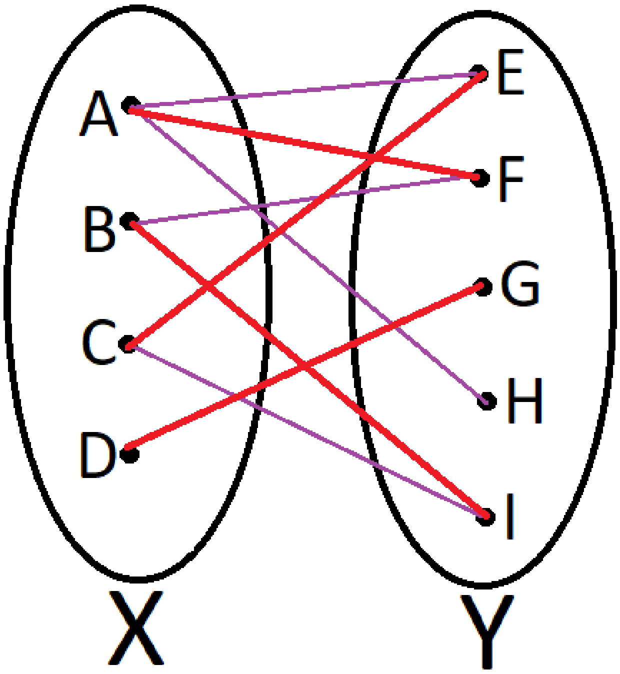


Abb. 2: Hier ist |X| = 4 und |N(S)| = |Y| = 5, sodass G eine Paarung von X enthält.

Damit kann die erste Frage mit *Ja* für die Männer beantwortet werden, da mehr Frauen als Männer zur Verfügung stehen.

5 Definitionen II

Eine **Präferenzliste** ist eine Familie vollständiger Ordnungen.

Bsp.:

Anton:	Emelie, Franzi, Hildegard
Bert:	Gisela, Franzi
Claus:	Emelie
Dan:	Gisela, Hildegard, Emelie, Franzi
Emelie:	Dan, Claus, Anton
Franzi:	Bert, Anton
Gislea:	Dan, Claus, Bert
Hildegard:	Bert, Claus, Dan, Anton
Inge:	Anton

Eine Paarung M in G ist **besser** als eine Paarung M' mit $M \neq M'$, wenn M die Ecken in B glücklicher macht als M'. Das heißt, wenn jede Ecke b aus einer Kante $f' \in M'$ auch mit einer Kante $f \in M$ inzidiert mit $f' \leq_b f$.
$a \in A$ ist **interessant** für ein $b \in B$, wenn $e = ab \in E \backslash M$ ist und M eine mit b inzidente Kante f enthält mit $f <_b e$.
$a \in A$ ist mit M **zufrieden**, falls a ungepaart oder $f >_a e$ gilt für alle Kanten $e = ab$ mit a interessant für b und f Paarungskante von a.
Wir nennen eine Paarung M in G **stabil**, wenn für jede Kante $e \in E \backslash M$ eine Kante $f \in M$ existiert so, dass e und f eine gemeinsame Ecke v mit $e <_v f$ haben.

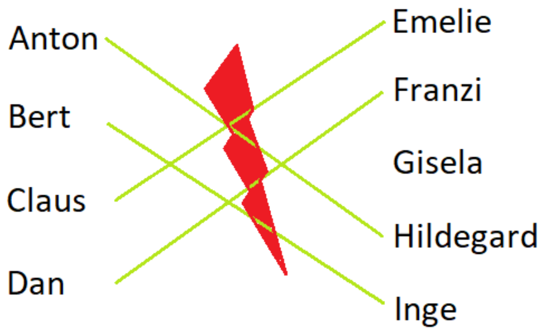


Abb. 3: keine stabile Paarung

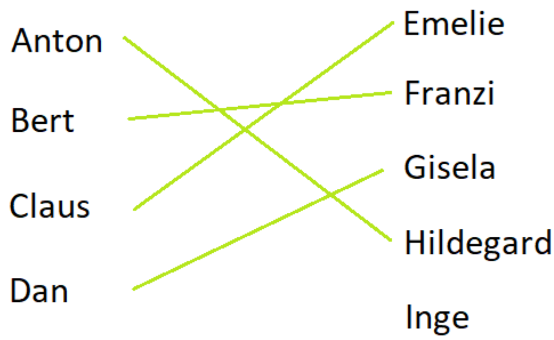


Abb. 4: stabile Paarung

Damit können wir auch die zweite Frage beantworten. Die Antwort lautet bei Abb. 3 *Nein*, da beispielsweise Gisela noch interessant für Dan als auch ungepaart ist, dieser aber mit Franzi ein Paar bildet. Ebenso bei tritt bei Bert und Inge ein Problem auf, da beide nicht beim anderen in der Präferenzliste auftauchen. Diese Paarung ist also instabil. Bei Abb. 4 findet man durch Überprüfen heraus, dass alle Beteiligten zufrieden sind. Demnach ist diese Paarung stabil.

Dies führt uns zu weiteren Fragen:

1. Gibt es immer eine Konstellation, sodass alle Beteiligten zufrieden sind?
2. Wie findet man solch eine Paarung?

Die Antworten auf diese Fragen liefert der Satz von Gale und Shapley:

6 Satz von Gale & Shapley

Für jedes System von Präferenzlisten hat G eine stabile Paarung.

Das bedeutet umgangssprachlich:
Wenn jede Person eine eindeutige Präferenz der Kandidaten hat, so kann stets eine Paarung gefunden werden, bei der kein Beteiligter seinen aktuellen Partner für jemand anderen verlassen würde.

Beweis: Wir konstruieren eine Folge sukzessive immer besserer Paarungen. Diese wird nach endlich vielen Schritten enden, da wir die Paarung an jeder Ecke $b \in B$ nur $d(b)$ mal echt verbessern können.
Wir starten mit der leeren Paarung und entwickeln eine Folge von Paarungen, die jeweils alle Ecken in A zufrieden stellen. Haben wir eine solche Paarung konstruiert, so betrachten wir im nächsten Schritt eine Ecke $a \in A$, die ungepaart aber interessant für ein $b \in B$ ist. Daraufhin fügen wir die $\leq_a$- maximale Kante ab zu M hinzu, für die für b interessant ist, und löschen aus M die bisherige Kante an b, insofern sie existiert.
Wir beenden die Konstruktion, sobald es kein solches a mehr gibt. Jede Paarung unserer Folge ist dann besser als die vorherige und stellt alle Ecken in A zufrieden. Die Folge endet schließlich mit einer Paarung M, für die jede ungepaarte Ecke in A für all ihre Nachbarn in B uninteressant ist.
Da jede gepaarte Ecke in A mit M zufrieden ist, ist die Paarung stabil. □
Anschaulich kann man diesen Algorithmus wie folgt darstellen:

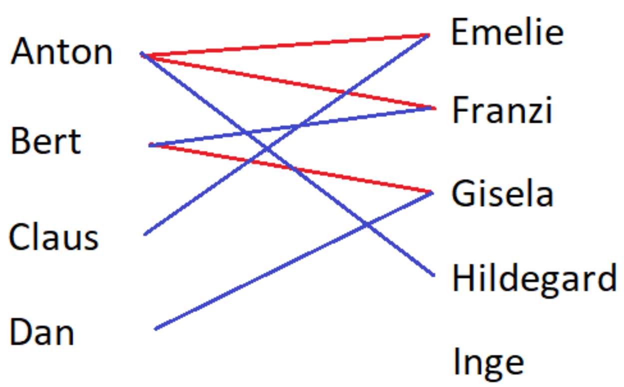


Abb. 5: Der Algorithmus vom Satz von Gale & Shapley anschaulich.

7 Folgerungen aus dem Satz von Gale & und Shapley

1. Gibt es eine Paarung, bei der keine stabile Paarung maximal und keine maximale Paarung stabil ist?

   Antwort: Ja! Betrachte folgende Präferenzliste: $\begin{array}{ll} a_1: & b_1 \\ a_2: & b_1, b_2 \\ b_1: & a_2, a_1 \\ b_2: & a_2 \end{array}$

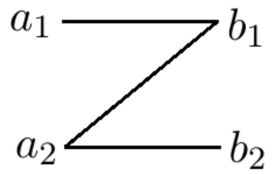


Abb. 6: maximale Paarungen: $M_1 = \{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}\}; M_2 = \{\{a_1, b_2\}, \{a_2, b_1\}\}$; stabile Paarungen: $S = \{\{a_2, b_2\}\}$

2. Kann man auch bei einem nicht bipartiten Graphen stets eine stabile Paarung finden?

   Antwort: Nein! Betrachte folgende Präferenzliste: $\begin{array}{ll} a_1: & a_2, a_3 \\ a_2: & a_3, a_1 \\ a_3: & a_1, a_2 \end{array}$

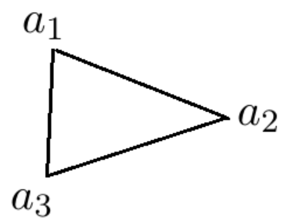


Abb. 7: keine stabile Paarung kann gefunden werden

3. Haben stabile Paarungen desselben Graphen stets die
   a) gleiche Anzahl an Paaren?
      Antwort: Ja! Beweis Übung
   b) gleichen Beteiligten?
      Antwort: Ja! Beweis Übung **Tipp:** Betrachte:

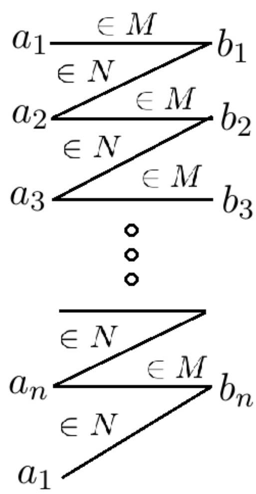


Abb. 8: Anschaulicher Tipp für den Beweis

8 Literatur

[1] Graphentheorie, dritte Auflage, Reinhard Diestel, Springer-Verlag, 2006