Universität Konstanz

Proseminar

Graphentheorie: Satz von Menger

Ruben Gihr
Matrikelnummer: 01/886691
Sommersemester 2018
7. Mai 2018

1 Satz von Menger

1.1 Satz von Menger Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A, B \subseteq V$ Teilmengen der Eckenmenge von G. Dann gilt: Die kleinste Mächtigkeit einer A und B in G trennenden Eckenmenge ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge mit disjunkten $A - B - Wegen$.
Also $min\{|T| : T$ trennende Eckenmenge$\} = max\{|\mathscr{P}| : \mathscr{P}$ Menge disjunkter $A - B - Wege\}$.

Bevor wir zum Beweis kommen, noch einige Wiederholungen der wichtigen Definitionen.

1.2 Definition Ein Weg ist ein nicht leerer Graph $P = (V, E)$ von der Form $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ und $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k\}$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Die Ecken x_0 und x_k bezeichnen wir als Endecken, $x_1 \ldots, x_{k-1}$ als innere Ecken von P.
Zwei Wege heißen disjunkt, wenn sie keine gemeinsame Ecke haben.
Zwei Wege heißen kreuzungsfrei, wenn sie bis auf ihre Endecken disjunkt sind.

1.3 Definition Sei P ein Weg und A, B Eckenmengen. Der Weg heißt $A-B-Weg$, wenn $V(P) \cap A = x_0$ und $V(P) \cap B = x_k$

1.4 Definition Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A, B \subseteq V$.
Eine Menge von Ecken, die aus einem Graphen entfernt werden müssen, sodass keine $A - B - Wege$ mehr existieren, nennt man trennende Eckenmenge.
Auch A, B sind beispielsweise trennende Eckenmengen. Also ist die Mächtigkeit der kleinsten trennenden Eckenmenge kleiner gleich $min\{|A|, |B|\}$.

1.5 Definition Seien $\mathscr{P}, \mathscr{Q}$ zwei Mengen disjunkter $A - B - Wege$. Dann heißt $\mathscr{Q}$ Erweiterung von $\mathscr{P}$, wenn die Ecken aus A (gleiches gilt für Ecken aus B) die in Wegen aus $\mathscr{P}$ enthalten sind, eine echte Teilmenge von Ecken aus A die in $\mathscr{Q}$ enthalten sind, sind.
Also $\bigcup \mathscr{P} \cap A \subsetneq \bigcup \mathscr{Q} \cap A$ und gleichzeitig $\bigcup \mathscr{P} \cap B \subsetneq \bigcup \mathscr{Q} \cap B$.
Es gilt dann: $|\mathscr{P}| + 1 \leq |\mathscr{Q}|$

Für die eine Richtung im Beweis des Satzes von Menger beweisen wir eine stärkere Aussage davon. Sei im folgenden stets $k = k(G, A, b)$ die kleinste Mächtigkeit eines $A - B - Trenners$ in G.

1.6 Satz Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A \subseteq V$.
Zu jedem $B \subseteq V$ und jeder Menge $\mathscr{P}$ von weniger als k disjunkten $A - B - Wegen$ gibt es in G eine Erweiterung aus $|\mathscr{P}| + 1$ vielen disjunkten $A - B - Wegen$.

Beweis: Wir machen eine Induktion nach der Anzahl der Ecken auf den in $\mathscr{P}$ enthaltenen Wegen, $|\bigcup\mathscr{P}|$.
Seien $B \subseteq V$ und $\mathscr{P}$ eine Menge von weniger als k disjunkter $A-B-Wegen$. Die Menge Aller Endecken T von $A-B-Wegen$ ist ein $A-B-Trenner$. Nun gilt $|T| \geq k > |\mathscr{P}|$.
Wähle $b \in T \setminus \bigcup\mathscr{P}$. Nach Definition gibt es einen $A-B-Weg$, R, mit Endecke b. Also $b \in (V(P) \cap B) \Rightarrow b \notin V(R))$.
Induktionsanfang: Sei $\mathscr{P} = \emptyset$, dann ist $|\mathscr{P} \cup R| = |\mathscr{P}| + 1 = 1$
Induktionsvoraussetzung: Gelte für alle $n < |\bigcup\mathscr{P}|$, dass zu jedem $B \subseteq V$ und jede Menge $\mathscr{P}'$ von weniger als k disjunkten $A-B-Wegen$, eine Erweiterung in G existiert aus $|\mathscr{P}'| + 1$ Wegen.
Induktionsschritt: $1, 2, \ldots, n \to n+1$
Sei $|\bigcup\mathscr{P}| = n+1$

1.Fall: Vermeidet R alle Wege aus $\mathscr{P}$, so ist $\mathscr{P} \cup \{R\}$ eine Erweiterung mit $|\mathscr{P} \cup \{R\}| = |\mathscr{P}| + 1$ disjunkten $A-B-Wegen$ und wir sind fertig.

2.Fall: R vermeidet nicht alle Ecken von Wegen aus $\mathscr{P}$.
Sei also $x \in V$ die letzte Ecke von R, die auf einem Weg $P_R \in \mathscr{P}$ liegt. Setze dann $B' = B \cup V(xP_R \cup xR)$ und $\mathscr{P}' = (\mathscr{P} \setminus \{P_R\}) \cup \{P_Rx\}$
Es ist dann $|\mathscr{P}'| = |\mathscr{P}|$, aber $|\bigcup\mathscr{P}'| \lneq |\bigcup\mathscr{P}|$, gleichzeitig gilt $k(G, A, B') \geq k(G, A, B)$.
Da $|\bigcup\mathscr{P}'| \lneq |\bigcup\mathscr{P}$, gibt es nach Induktionsannahme eine Erweiterung $\mathscr{Q}'$ von $\mathscr{P}'$ aus $|\mathscr{P}'| + 1$ Wegen von A nach B'.
In $\mathscr{Q}$ existiert dann ein Weg Q, der in x endet, und ein Weg Q' der in $y \in B' \setminus V(\mathscr{P}')$ endet.
Gilt $y \notin xP$, so erhalten wir die gewünschte Erweiterung $\mathscr{Q}$ von $\mathscr{P}$ aus $\mathscr{Q}'$, indem wir Q durch xP verlängern. Falls $y \notin B$, verlängern wir Q' durch yR.
Andernfalls $y \in \mathring{x}P$ (da x Endecke eines Weges aus $\mathscr{P}'$) und wir erhalten $\mathscr{Q}$ aus $\mathscr{Q}'$, indem wir Q um xR und Q' um yP verlängern. □

1.7 Beweis: Satz von Menger Somit kommen wir jetzt zum Beweis des Satzes von Menger.
$\geq$: Jeder $A-B-Weg$ muss eine Ecke der minimalen Eckenmenge enthalten, also kann es maximal k solche disjunkte $A-B-Wege$ geben. (mit $k = min\{|T| : T \text{ trennende Eckenmenge}\}$)
$\leq$: Wähle $|\mathscr{P}| = k-1$ mit Satz 1.6 folgt, dass es eine Erweiterung von k disjunkten $A-B-Wegen$ gibt. □

1.8 Definition Eine Menge von $\{a\}-B-Wegen$ heißt $\{a\}-B-$Fächer, wenn die Wege paarweise nur die Ecke a gemeinsam haben.

1.9 Korollar Ist $B \subseteq V$ und $a \in V \setminus B$, so ist die kleinste Mächtigkeit einer a von B in G trennenden Eckenmenge $\not\supseteq \{a\}$ gleich der größten Mächtigkeit eines $a-B-$Fächers.

Beweis: Wähle $A = N_G(a)$ die Nachbarn von a und Wende Satz 1.1 auf $G - a$ an. □

1.10 Korollar Sei $a, b \in V$ zwei verschieden Ecken von G.
Wenn a und b nicht benachbart sind, so ist die kleinste Mächtigkeit einer a von b in G trennenden Eckenmenge $\not\supseteq \{\{a\}, \{b\}\}$ gleich der größten Mächtigkeit einer Menge kreuzungsfreier $a - b - Wege$ in G.

Beweis: Sei $A = N_G(a)$ und $B = N_G(b)$, wende Satz 1.1 auf $G - \{a, b\}$. □

1.11 Definition Ein nicht leerer Graph G heißt zusammenhängend, wenn er für je zwei seiner Ecken x, y einen $x - y - Weg$ enthält. G heißt $k-$zusammenhängend (für $k \in \mathbb{N}$), wenn $|G| > k$ gilt und $G - X$ für jede Eckenmenge $X \subseteq V$ der Mächtigkeit $< k$ zusammenhängend ist. Also G ist $k-$zusammenhängend, wenn keine zwei Ecken von G durch weniger als k andere Ecken getrennt werden können.

1.12 globale Version Satz von Menger: G ist $k-$zusammenhängend genau dann, wenn G zwischen je zwei Ecken k kreuzungsfreie Wege enthält.

Beweis:
$\Leftarrow$: Enthalte G zwischen je zwei Ecken k kreuzungsfreie Wege, so gilt nach Korollar 1.10 die trennende Eckenmenge hat mindesten die Mächtigkeit k, also werden je zwei Ecken von mindestens k Ecken getrennt, folglich ist $G\, k-$zusammenhängend.
$\Rightarrow$: Sei $G\, k-$zusammenhängend (also insbesondere $|G| > k$) es gilt zu zeigen G hat zwischen zwei Ecken a, b k kreuzungsfreie Wege. Da G $k-$zusammenhängend ist können a und b nicht durch eine $k - 1$ elementige Mege $T \subseteq V \setminus a, b$ getrennt werden. Die kleinste a, b trennende Eckenmenge hat also mindestens k Elemente.
Angenommen G enthält zwei Ecken a, b, die durch weniger als k kreuzungsfreie Wege verbunden sind.
Nach Korollar 1.10 sind a, b dann benachbart.
Es sei G' ein Graph mit $E(G') = E(G) - ab$. In G' gibt es dann höchstens $k - 2$ kreuzungsfreie $a - b - Wege$. Nach Korollar 1.10 sind a und b daher in G' durch eine Menge X von höchstens $k - 2$ Ecken getrennt. Da $|G| > k$ (Def. k-zusammenhängend), hat G noch eine Ecke $v \notin X \cup \{a, b\}$. Nun trennt X die Ecke v in G' auch von a oder b, sonst gäbe es einen Weg P_1 von a nach v und einen Weg P_2 von b nach v, der jeweils nicht X trifft, somit X keine trennede Eckenmenge in G'.
ŒX trennt a von v, dann trennt aber $X \cup \{b\}$ die Ecken v und a in G, was wegen $|X \cup \{b\}| = k - 1$ dem k-Zusammenhang von G widerspricht.