
Übungsblatt 12 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1 (4P) Sei K ein Körper und $f \in \mathfrak{m} := (X_1, \dots, X_n) \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$. Betrachte den Ring $R := K[X_1, \dots, X_n]/(f)$, den kanonischen Ringepimorphismus $\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow R$, $f \mapsto \bar{f}$ und das maximale Ideal $\bar{\mathfrak{m}} := \varphi(\mathfrak{m})$ von R . Zeige, dass $R_{\bar{\mathfrak{m}}}$ genau dann ein regulärer lokaler Ring ist, wenn $f = 0$ oder wenn nicht alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ von f im Nullpunkt verschwinden.

Aufgabe 2 (4P) Zeige, dass die regulären lokalen Ring der Dimension 1 genau die lokalen Hauptidealringe sind, die keine Körper sind.

Aufgabe 3 (4P) Sei R ein kommutativer lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} . Wir nennen ein Ideal $I \subseteq \mathfrak{m}$ von R *prinzipiell*, wenn es sich von $\text{ht}(I)$ vielen Elementen erzeugen lässt. Ein Ideal I von R heißt *ungemischt*, wenn $\text{ass}_R(R/I) = (\text{ass}_R(R/I))^{\min}$. Zeige, dass R genau dann ein Cohen-Macaulay-Ring ist, wenn jedes prinzipielle Ideal von R ungemischt ist.

Freiwillige Zusatzaufgabe (4 Bonuspunkte) für algebraische Geometer

Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $K = \mathbb{C}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir erinnern daran oder informieren darüber, dass wir in den Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie im Wintersemester 2015/2016 gezeigt haben, dass für zwei irreduzible affine Untervarietäten $V \subseteq \mathbb{A}^m$, $W \subseteq \mathbb{A}^n$ auch $V \times W$ wieder eine irreduzible Untervarietät von \mathbb{A}^{m+n} ist. Dieses Ergebnis darf im folgenden benutzt werden. Seien nun $M \subseteq \mathbb{A}^m$ sowie $N \subseteq \mathbb{A}^n$ zwei affine Untervarietäten. Zeige mit den Mitteln der Vorlesung, dass $\dim(M \times N) = \dim(V) + \dim(W)$.

Abgabe bis Montag, den 13. Juli 2016, 10:00 Uhr in der Übung.