Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1 (6P) Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Es gibt ein Element $a \in R \setminus \{0, 1\}$ mit $a^2 = a$.

(b) Es gibt $a, b \in R \setminus \{0, 1\}$ mit $a^2 = a$, $b^2 = b$ und $a + b = 1$.

(c) Es gibt kommutative Ringe $A \neq \{0\}$ und $B \neq \{0\}$ mit $R \cong A \times B$.

(d) Es gibt Ideale $I \neq (0)$ und $J \neq (0)$ in R derart, dass jedes Primideal von R entweder I oder J enthält.

Aufgabe 2 (6P) Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ.

(a) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} R$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Zeige, dass man einen Ringisomorphismus

$$\psi\colon R_\mathfrak{p} \to (S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}}\,,\ \frac{a}{b} \mapsto \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{1}} \quad (a \in R, b \in R \setminus \mathfrak{p})$$

hat.

(b) Sei nun weiter M ein R-Modul und man fasse den $(S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$-Modul $(S^{-1}M)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$ vermöge ψ als $R_\mathfrak{p}$-Modul auf. Zeige, dass man dann einen $R_\mathfrak{p}$-Modulisomorphismus

$$M_\mathfrak{p} \to (S^{-1}M)_{S^{-1}\mathfrak{p}}\,,\ \frac{x}{b} \mapsto \frac{\frac{x}{1}}{\frac{b}{1}} \quad (x \in M, b \in R \setminus \mathfrak{p})$$

hat.

(c) Sei R noethersch und M ein R-Modul. Zeige

$$\operatorname{ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{ass}(M), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Aufgabe 3 (6P) Sei R ein kommutativer Ring und N die Menge seiner Nullteiler.

(a) Zeige $\{S \subseteq R \mid R \setminus S \in (\operatorname{spec} R)^{\min}\} = \{S \subseteq R \setminus \{0\} \mid S \text{ multiplikativ}\}^{\max}$.

(b) Zeige $N \supseteq \bigcup\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in (\operatorname{spec} R)^{\min}\}$.

(c) Zeige, dass in (b) Gleichheit gilt, falls R reduziert ist.

(d) Zeige, dass N immer eine Vereinigung von Primidealen ist.

Hinweis: Verwende die Theorie der Saturierungen von Blatt 3.

Abgabe bis Freitag, den 13. Mai 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.