Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1 (3P) (Ein Kriterium für Faktorialität von Ringen durch die Höhe)
Zeige, dass ein noetherscher Integritätsring R genau dann faktoriell ist, wenn jedes Primideal der Höhe 1 ein Hauptideal ist.

Aufabe 2 (4P) (Parametersysteme und algebraische Unabhängigkeit)
Sei R ein kommutativer lokaler noetherscher Ring, $a_1, \ldots, a_n$ ein Parametersystem von R und $K \subseteq R$ ein Körper. Zeige, dass $a_1, \ldots, a_n$ algebraisch unabhängig sind über K.

Aufgabe 3 (4P) (Primideale zwischen zwei Primidealen)
Seien R ein kommutativer noetherscher Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subseteq R$ Primideale mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{c}$. Zeige: Dann gibt es zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ unendlich viele Primideale.

Aufgabe 4 (5P) (Ein unendlichdimensionaler noetherscher Ring)
Sei K ein Körper, $A = K[Z_{i,j} \mid (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \geq j]$ und definiere für $i \in \mathbb{N}$ das Ideal $\mathfrak{p}_i = (Z_{i,j} \mid j \in \mathbb{N},\ i \geq j)$. Zeige, dass $S := A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{p}_i$ multiplikativ ist und betrachte $R := S^{-1}A$. Bestimme alle maximalen Ideale von R. Zeige, dass $\dim(R) = \infty$ und dass R noethersch ist.

Abgabe bis Freitag, den 27. Mai 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.