Freundschaftsgraphen und der Freundschaftssatz

Im folgenden sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|G| = n \in \mathbb{N}$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E \subseteq [V]^2$.

Definition 1.0.1. Ein Freundschaftsgraph ist ein endlicher Graph G in dem je zwei Ecken genau einen gemeinsamen Nachbarn haben.

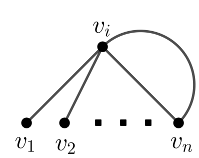
Definition 1.0.2. Die Adjazenzmatrix $A_G = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$ von G ist definiert durch:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ falls } v_i v_j \in E \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Lemma 1.0.3. *Die Anzahl der Kantenzüge der Länge $k \in \mathbb{N}$ zwischen den Ecken v_i und v_j $(v_i, v_j \in V)$ in G, ist gleich dem $ij-$ten Eintrag in A_G^k. Siehe* [1] *Exercise 3.1.2.*

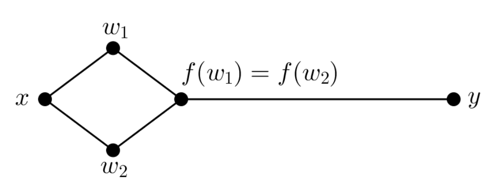
Satz 1.0.4. *(Paul Erdős): Sei G ein Graph in dem je zwei Ecken genau einen gemeinsamen Nachbarn haben. Dann besitzt G eine Ecke mit Grad $n - 1$.*

Beweis. Wir nehmen an der Satz ist falsch. Sei daher G ein Freundschaftsgraph mit $\Delta(G) < n - 1$. Die Annahme ist plausibel, da wenn G eine Ecke $v_i \in V$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ enthalten würde für die $d(v_i) \geq n$ gilt, würde v_i mehr als einen gemeinsamen Nachbarn mit einer anderen Ecke $v_j \in V$ mit $j \in \{1, \dots, n\}$ und $i \neq j$ haben.



Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme das G ein Freundschaftsgraph ist.

Wir zeigen das G regulär ist. Seien dazu x und y zwei nicht adjazente Ecken und Œ $d(x) \geq d(y)$. Betrachte nun die Funktion $f : N(x) \to N(y)$, $w \mapsto$ gemeinsamer Nachbar von w und x. Sie ist wohldefiniert, da G ein Freundschaftsgraph ist und $N(x) \cap \{y\} = \emptyset$ gilt. Sie ist injektiv, sei dazu w_1, $w_2 \in N(x)$ $w_1 \neq w_2$ mit $f(w_1) = f(w_2)$ betrachtet man:



So haben x und $f(w_1)$ bzw. $f(w_2)$ zwei gemeinsame Nachbarn, dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme das G ein Freundschaftsgraph ist, daher gilt $w_1 = w_2$. Da f injektiv ist folgt $|N(x)| \leq |N(y)|$ und daher $N(x) = N(y)$ bzw. $d(x) = d(y)$.

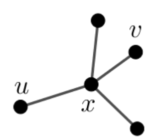
D.h. je zwei nicht benachbarte Ecken von G haben denselben Grad, äquivalent dazu ist das je zwei benachbarte Ecken in $\overline{G}$ denselben Grad haben. Um nun zu zeigen das G regulär ist, reicht es zu zeigen das $\overline{G}$ zusammenhängend ist.

Dazu zeigen wir das $\overline{G}$ nur aus einer Komponente besteht. $\overline{G}$ hat keine einelementigen Komponenten, da gilt das $\delta(\overline{G}) = n-1-\Delta(G) > 0$ ist. $\overline{G}$ hat auch keine zwei Komponenten der Mächtigkeit 2 oder mehr, da G sonst einen Kreis der Länge 4 enthalten würde was aber ein Widerspruch zur Annahme ist das G ein Freundschaftsgraph ist daher ist G regulär.

G ist k-regulär für ein $k \in \mathbb{N}$, da $|G| = n$ gilt. Durch abzählen der Wege der Länge 2 in G erhalten wir

$$n\binom{k}{2} = \binom{n}{2} \Leftrightarrow n = k^2 - k + 1.$$

Dabei beschreibt $n\binom{k}{2}$ die Wege der Länge 2 indem man eine Ecke x betrachtet,



wählt man nun zwei Nachbarn u und v aus den k Nachbarn von x, so hat der Weg uxv die Länge 2. Da es n Ecken in G gibt ist dies die Anzahl der Wege mit Länge 2. Ebenso beschreibt dies $\binom{n}{2}$, denn da G ein Freundschaftsgraph ist beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten zwei Ecken aus V auszuwählen die Anzahl der Wege mit Länge 2.

Sei nun A_G die Adjazenzmatrix von G. Dann gilt nach 1.0.3 das $A_G^2 = J + (k-1)I_n$ gilt mit $I, J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wobei alle Einträge in J gleich eins sind und I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix ist.

Die Eigenwerte von J sind 0 mit Vielfachheit $n-1$ und n mit Vielfachheit 1. D.h. die Eigenwerte von A_G^2 sind $k-1$ mit Vielfachheit $n-1$ und k^2 mit Vielfachheit 1. Die Eigenwerte der Adjazenzmatrix A_G sind somit $\pm\sqrt{k-1}$ mit gemeinsamer Vielfachheit $n-1$ und k mit Vielfachheit 1.

Da G keine Schleifen enthält sind alle Einträge auf der Diagonalen von A_G gleich 0, d.h. dass $tr(A_G) = 0$ gilt. Da A symmetrisch und daher diagonalisierbar ist gilt das A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist in der die Eigenwerte die

Einträge auf der Diagonalen sind.

Da ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben gilt

$$tr(A_G) = a\sqrt{k-1} - b\sqrt{k-1} + k = 0 \text{ mit } a + b = n - 1 \text{ für } a, b \in \mathbb{N}.$$

Für ein bestimmtes $t \in \mathbb{Z}$ folgt somit

$$t\sqrt{k-1} = k \Leftrightarrow t^2(k+1) = k^2.$$

Da t^2,$(k-1)$,$k^2 \in \mathbb{N}$ sind gilt das $(k-1)|k^2$ dies gilt aber nur für $k = 2$. D.h. mit $n = k^2 - k + 1$ folgt somit $n = 3$ dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme das $\Delta(G) < n - 1$ gilt. Damit gilt die Aussage des Satzes.

□

Literatur

[1] Bondy, Adrian ; Murty, U.S.R.: Graph Theory. London: Springer London, 2008.