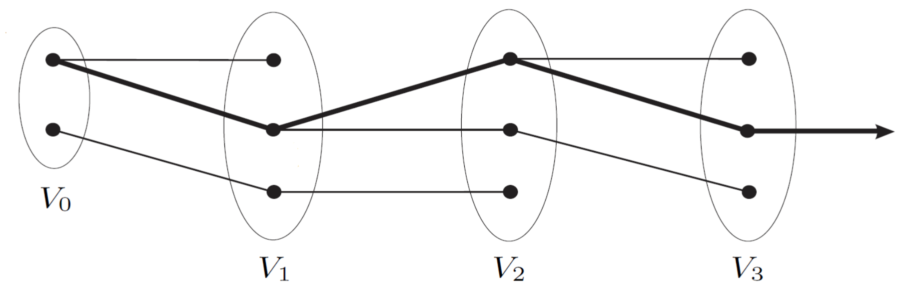
Unendlichkeitslemma

Definition 1. Sei G ein Graph und $P \subset G$ von der Form
$V(P) = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$ $\qquad E(G) = \{x_0x_1, x_1x_2, ...\}$,
so nennen wir P Strahl in G. Wir schreiben dann auch $x_0x_1x_2...$ anstelle von P.

Lemma 2. *Sei $V_0, V_1, V_2, ...$ eine unendliche Folge paarweise disjunkter, nichtleerer, endlicher Mengen und G ein Graph auf ihrer Vereinigung mit $\forall n \in \mathbb{N} : \forall v \in V_n : v$ hat einen Nachbar in V_{n-1}.*



(Fig. 8.1.2 aus [2] verwendet)

Dann existiert ein Strahl $v_0v_1v_2$ in G mit $v_i \in V_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Setze $\mathcal{P}$ als die Menge aller Wege der Form $w_nw_{n-1}...w_1w_0$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $w_i \in V_i$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$. Offenbar ist $\mathcal{P}$ unendlich.
Wir definieren unseren Strahl induktiv.
Startpunkt: Da V_0 endlich ist und $\mathcal{P}$ unendlich ist, muss es eine Ecke $v_0 \in V_0$ geben, sodass es unendlich viele Wege aus $\mathcal{P}$ gibt mit v_0 als Endecke. Wähle ein solches v_0 und setze $\mathcal{P}_0$ als die Menge aller nichttrivialen Wege aus $\mathcal{P}$ mit Endecke v_0.
Laufvorschrift: Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und seien $v_0, v_1, ..., v_{n-1}$ mit $v_i \in V_i$ für alle $i \in \{1, ..., n-1\}$ und $\mathcal{P}_{n-1} \subset \mathcal{P}$ bereits gegeben derart, dass $\mathcal{P}_{n-1}$ die Menge aller Wege aus $\mathcal{P}$ ist, die $v_0v_1...v_{n-1}$ als echten Teilweg enthalten und $\mathcal{P}_{n-1}$ unendlich ist.
Da jeder Weg aus $\mathcal{P}_{n-1}$ genau eine Ecke aus V_n enthält, $\mathcal{P}_{n-1}$ unendlich ist und V_n endlich ist, existiert eine Ecke $v_n \in V_n$, sodass v_n in unendlich vielen Wegen aus $\mathcal{P}_{n-1}$ enthalten ist.
Wähle ein solches $v_n \in V_n$ und setze $\mathcal{P}_n$ als die Menge aller Wege aus $\mathcal{P}_{n-1}$, die $v_0v_1...v_n$ als echten Teilweg enthalten.
Man sieht, dass $\mathcal{P}_n$ und $v_0, v_1, ..., v_n$ gerade wieder die Voraussetzungen für unsere Laufvorschrift erfüllen.
Über unseren Startpunkt und induktives Anwenden der Laufvorschrift erhalten wir $v_0, v_1, v_2, ...$, sodass $v_0v_1v_2...$ ein Strahl in G ist mit $v_i \in V_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Satz 3. *Sei G ein abzählbar unendlicher Graph und $k \in \mathbb{N}$. Sind alle endlichen Teilgraphen von G k-färbbar, so ist G k-färbbar.*

Beweis. Wähle $v_o, v_1, ... \in V(G)$ mit $V(G) = \{v_0, v_1, ...\}$ (G abzählbar).
Setze $G_n := G[v_0, v_1, ..., v_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Setze V_n als die Menge aller k-Färbungen von G_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Definiere den Graphen H durch
$V(H) := \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ und setze $E(H)$ als die Menge aller Kanten cc' mit $c \in V_n, c' \in V_{n-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $c|_{\{v_0,...,v_{n-1}\}} = c'$.

Nach Voraussetzung sind $V_0, V_1, ...$ nicht leer. $V_0, V_1, ...$ sind paarweise disjunkt, da sich der Definitionsbereich der Funktionen aus $V(H)$ sich von Menge zu Menge ändert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist V_n endlich denn $V_n \subset \{1, ..., k\}^{\{v_0,...,v_n\}}$ und damit
$\# V_n \leq \# \{1, ..., k\}^{\{v_0,...,v_n\}} = k^n$.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c \in V_n$. Dann ist $c|_{\{v_0,...,v_{n-1}\}}$ offenbar eine k-Färbung von G_{n-1} und somit in V_{n-1} enthalten und nach Definition von $E(H)$ benachbart zu c.
Wir können nun das Unendlichkeitslemma auf den Graphen H anwenden und erhalten die Existenz eines Strahls $c_0 c_1 c_2 ...$ mit $c_i \in V_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
Setze $c_G : V(G) \to \{1, ...k\}, v_n \mapsto c_n(v_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$.
Dann ist c_G eine k-Färbung von G, denn:
Seien $v_i, v_j \in V(G)$ mit $i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j$ und v_i, v_j benachbart. Œ $i < j$, dann gilt
$c_G(v_i) = c_i(v_i) = c_j(v_i) \neq c_j(v_j) = c_G(v_j)$, da c_j k-Färbung von G_j ist, $v_i, v_j \in G_j$ und v_i, v_j benachbart. □

Proposition 4. *Sei G ein unendlicher, zusammenhängender Graph. Dann enthält G einen Strahl oder eine Ecke mit unendlichem Grad.*

Beweis. Wähle einen beliebigen Knoten $v_0 \in V(G)$ und setze $V_0 := \{v_0\}$. Definiere nun induktiv $V_n := \{v \in V(G) \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} V_i \right) \mid v \text{ hat einen Nachbarn in } V_{n-1}\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
<u>Fall 1 : $\exists i \in \mathbb{N} : V_i$ ist unendlich</u>
Œ V_{i-1} endlich (ansonsten betrache V_{i-1} usw.). Es gilt nun also, dass die endlich vielen Knoten aus V_{i-1} unendlich viele Nachbarn haben (nach Definition von V_i). Daraus folgt, dass ein Knoten in V_{n-1} existieren muss mit unendlichem Grad.
<u>Fall 2 : $\forall i \in \mathbb{N} : V_i$ ist endlich</u>
<u>Fall 2.1 : $\exists k \in \mathbb{N} : V_k = \emptyset$</u>
Man sieht, dass nun für alle $j \in \mathbb{N}, j \geq k$ gelten muss: $V_j = \emptyset$.
Da nun gilt $\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ ist endlich und $V(G)$ ist unendlich, existiert ein $v \in V(G) \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$.
Da G zusammenhängend ist, existiert ein Weg zwischen v_0 und v in G. Man sieht, dass alle Knoten des Weges in $\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ enthalten sein müssen, da sie mit v_0 über einen Weg verbunden sind. Also gilt insbesondere $v \in \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$. Widerspruch! Dieser Fall kann also nie eintreten.
<u>Fall 2.2 : $\forall k \in \mathbb{N} : V_k \neq \emptyset$</u>
Man sieht, dass $V_0, V_1, ...$ paarweise disjunkt sind. Man sieht auch, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v \in V_n$ ein Nachbar von v in V_{n-1} existiert. Fall 2.1 zeigt auch, dass $V(G) = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ gelten muss.
Somit sind alle Voraussetzungen erfüllt, um auf G das Unendlichkeitslemma anwenden zu können und erhalten die Existenz eines Strahls in G.

In allen möglichen Fällen gilt also unsere Behauptung. □

Literatur

[1] **Diestel:** Graphentheorie, 5.Auflage, Springer.

[2] Schlacht-Skript: https://www.math.uni-hamburg.de/home/schacht/lehre/SS13/GT/Ch8prelims.pdf