Universität Konstanz
Department of Mathematics and Statistics
Wintersemester 2017/2018

Tom-Lukas Kriel
María López Quijorna
Cordian Riener

Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4P) Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$ und $a \in K$. Zeige:

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Es gibt eine Anordnung auf K.

(ii) $-1 \notin \sum K^2$.

(iii) Sind $a_1, ..., a_n \in K$ und $a_1^2 + ... + a_n^2 = 0$, so ist $a_1 = 0$.

(b) $a \in \sum K^2$ genau dann wenn $a \in P$ für jede Anordnung P von K.

(c) K hat genau dann genau eine Anordnung wenn für jedes $b \in K \setminus \{0\}$ entweder $b \in \sum K^2$ oder $-b \in \sum K^2$.

Aufgabe 2 (4P) Sei P eine Anordnung auf $\mathbb{R}(t)$. Die Restriktion $Q = P \cap \mathbb{Q}(t)$ von P auf $\mathbb{Q}(t)$ ist eine Anordnung auf $\mathbb{Q}(t)$. Untersuche, wann man $(\mathbb{Q}(t), Q)$ als angeordneten Unterkörper von $\mathbb{R}$ auffassen kann. Ist die Restriktionsabbildung injektiv?

Aufgabe 3 (8P) Sei K ein Körper. Betrachte den sogenannten Ring der formalen Laurentriehen über K:

$$K((t)) := \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)t^k \mid \ell \in \mathbb{Z}, a \in K^{\mathbb{Z}}, a(\ell-1) = a(\ell-2) = ... = 0 \right\}$$

Für $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)t^k$, $g = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b(j)t^j$ definieren wir

$$f + g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a(k) + b(k))t^k$$

$$f * g = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k,j\in\mathbb{Z},\ i=k+j} a(k)b(j)t^i$$

Mache dir klar, warum $(K((t)), +, *)$ eine K-Algebra ist.

(a) Zeige, dass $K((t))$ ein Körper ist.

(b) Setze $\mathbb{R}[[t]] = \{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)t^k \mid \ell \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, a(-1) = a(-2) = ... = 0\}$. Zeige: Erfüllt $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)t^k \in \mathbb{R}[[t]]$ die Bedingung $a(0) > 0$, so gibt es ein $g \in \mathbb{R}[[t]]$ mit $g^2 = f$.

(c) Zeige, dass es auf $\mathbb{R}((t))$ genau zwei Anordnungen gibt.

Abgabe bis 17.November, 2017, 11:45 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.