Universität Konstanz
Department of Mathematics and Statistics
Wintersemester 2017/2018

Tom-Lukas Kriel
María López Quijorna
Cordian Riener

Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4P). Betrachte den Körper $L := \mathbb{R}(t)$ der rationalen Funktionen in der Unbestimmten t über den reellen Zahlen zusammen mit der Ordnung $\leq_{0,+}$ aus der Vorlesung. Wir betrachten den Unterkörper $K = \mathbb{R}(t^2)$ von L mit der eindeutigen Anordnung $\leq$, welche $(K, \leq)$ zu einem geordneten Unterkörper von $(L, \leq_{0,+})$ macht. Zeige:

(a) L ist eine algebraische Erweiterung von K.

(b) $K \cap \{x \in L \mid t < x < 2t\} = \emptyset$

(c) Für $f := X^4 - 5t^2X^2 + 4t^4 \in K[X]$ ist $f \geq 0$ auf K aber nicht auf L.

Aufgabe 2 (4P). Zeige, dass für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper C mit Charakteristik 0 ein reell abgeschlossener Unterkörper R von C mit $C = R(\mathbb{i})$ existiert.

Hint: Schreibe C als algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}(T)$ mit einer Menge T, wobei $\mathbb{Q}(T)|\mathbb{Q}$ transzendent ist (d.h. kein Element aus $\mathbb{Q}(T) \setminus \mathbb{Q}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$).

Aufgabe 3 (4P).

(a) Wahr oder falsch: Sind R_1 und R_2 reell abgeschlossene Körper, die als Körper isomorph sind, so sind sie auch als geordnete Körper isomorph.

(b) Wahr oder falsch: Sind R_1 und R_2 reell abgeschlossene Körper und $R_1(\mathbb{i}) \cong R_2(\mathbb{i})$, so sind auch R_1 und R_2 isomorphe Körper?

Aufgabe 4 (4P). Sei (K, P) ein angeordneter Körper, $R := \overline{(K, P)}$ der reelle Abschluss von (K, P) und $L|K$ eine endliche Körpererweiterung.

(a) Zeige, dass

$$\begin{aligned} \{\psi : L \to R \mid \psi|_K = \mathrm{id}_K\} &\to \{Q \mid Q \text{ Fortsetzung von } P \text{ auf } L\} \\ \psi &\mapsto \psi^{-1}(R^2) \end{aligned}$$

eine Bijektion ist.

(b) Sei $a \in L$ mit $L = K(a)$ und bezeichne f das Minimalpolynom von a über K. Zeige, dass es genau $|\{x \in R \mid f(x) = 0\}|$ viele Fortsetzungen der Ordnung P von K auf eine Ordnung auf L ist.

Abgabe bis 1.Dezember, 2017, 11:45 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.