Universität Konstanz
Department of Mathematics and Statistics
Wintersemester 2017/2018

Tom-Lukas Kriel
María López Quijorna
Cordian Riener

Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (10P). Sei A ein kommutativer Ring und $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann heißt $\sqrt{I}^{\text{re}} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, s \in \sum A^2 : a^{2n} + s \in I\}$ das reelle Radikalideal von I in A. I heißt reell oder reelles Radikalideal, falls $I = \sqrt{I}^{\text{re}}$. Wir setzen

$$\sqrt[2]{I} := \{a \in A \mid \exists s \in \sum A^2 : a^2 + s \in I\}$$

und induktiv für $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[2^{k+1}]{I} := \sqrt[2]{\sqrt[2^k]{I}}.$$

Ziege:

(a) $\{a \in A \mid a^2 \in I\}$ ist im Allgemeinen kein Ideal von A.

(b) $\sqrt[2]{I}$ ist ein Ideal. Wir nennen es das *Quadratwurzelideal* von I.

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sqrt[2^k]{I} = \left\{a \in A \mid \exists s \in \sum A^2 : a^{2^k} + s \in I\right\}.$$

(d) $\sqrt{I}^{\text{re}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[2^k]{I}$.

(e) Ist A noethersch, so gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{I}^{\text{re}} = \sqrt[2^k]{I}$.

(f) Es sind äquivalent:

  (i) I ist reell.

  (ii) $\forall a_1, ..., a_n \in A : a_1^2 + ... + a_n^2 \in I \implies a_1 \in I$.

  (iii) $\text{qf}(A/I)$ ist reell.

(g) Ist I sogar ein Primideal, so sind die folgenden Aussagen sind äquivalent

  (i) I ist reell.

  (ii) $\exists P \in \text{sper}(A) : I = \text{supp}(P)$.

(h) Dann ist $\sqrt{I}^{\text{re}} = \bigcap_{P \in \text{sper}(A)} \text{supp}(P) = \bigcap_{I \subseteq A \text{ Primideal}, I \text{ reell}} I$

Aufgabe 2 (6P). Sei $A = \mathbb{R}[\underline{X}]$ und $\mathscr{I}, \mathscr{S}, \mathscr{T} \subseteq \mathbb{R}[\underline{X}]$. Es sei I das von $\mathscr{I}$ erzeugte Ideal, S die von $\mathscr{S}$ multiplikative Menge ($S = \{g_1 ... g_m \mid m \in \mathbb{N}_0, g_1, ..., g_m \in \mathscr{S}\}$) und T die von $\mathscr{T}$ erzeugte Präordnung. Aus der Vorlesung wissen wir, dass (a) und (b) der folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) $\exists i \in I, s \in S, t \in T : i + s^2 + t = 0$

(b) Es gibt keine Anordnung P von A so, dass für alle $i \in I, s \in S, t \in T$: $\widehat{i}(P) = 0, \widehat{t}(P) \geq 0, \widehat{s}(P) \neq 0$.

(c) Es gibt kein $x \in \mathbb{R}^n$ so, dass für alle $i \in I, s \in S, t \in T$: $i(x) = 0, t(x) \geq 0, s(x) \neq 0$

$(a) \implies (c)$ ist immer erfüllt. $(c) \implies (a)$ gilt, wenn $\mathscr{S}, \mathscr{T}, \mathscr{I}$ endlich sind. Überprüfe für jede einzelne dieser Mengen, ob $(c) \implies (a)$ immer noch gilt wenn man auch unendlich viele Elemente zulässt. Im Falle, dass dies nicht der Fall ist, gib ein Gegenbeispiel an (eine Situation, in der (c) gilt aber nicht (a)) und eine Anordnung P von A, welche die Relationen aus (b) erfüllt.

Aufgabe 3 (2P). Sei R ein reell abgeschlossener Körper, $C := R(\mathtt{i})$ sein algebraischer Abschluss und I ein reelles Radikalideal von $R[\underline{X}]$. Betrachte $V_R(I) := \{x \in R^n \mid \forall f \in I : f(x) = 0\}$ und $V_C(I) := \{x \in C^n \mid \forall f \in I : f(x) = 0\}$. Ziege: $V_R(I)$ ist Zariski-dicht in $V_C(I)$, d.h., wenn ein beliebiges Polynom aus $C[\underline{X}]$ auf $V_R(I)$ verschwindet, so auch auf $V_C(I)$.

Abgabe bis 12. Januar, 2018, 11:45 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.