1 Satz von Cantor-Bernstein

Satz: Seien X,Y Mengen. Es existiert eine Bijektion zwischen X und Y genau dann wenn injektive Abbildungen f: X $\to$ Y und g: Y $\to$ X existieren.
Beweis: Sind X, Y endliche Mengen, so ist der Beweis trivial. Seien o.E.d.A. X, Y nun nichtleere, unendliche, paarweise disjunkte (für Notation im Beweis einfacher) Mengen und es existiere f: X $\to$ Y' mit Y' $\subseteq$ Y und g: Y $\to$ X' mit X' $\subseteq$ X, wobei f und g Bijektionen sind, d.h.
$\bar{f}$: X $\to$ Y, x $\mapsto$ f(x) und $\bar{g}$: Y $\to$ X, y $\mapsto$ g(y) sind injektiv. Es bleibt also zu zeigen, dass eine Bijektion Φ X $\to$ Y existiert.

Sei x$\in$ X. Definiere das Orbit von X als die Menge $\{..., g^{-1}f^{-1}g^{-1}(x), f^{-1}g^{-1}(x), g^{-1}(x), x, f(x), gf(x), fgf(x), ...\}$ wobei f^{-1} und g^{-1} die Inversen von f und g sind. Diese Menge kann als Graph G aufgefasst werden, wobei für a,b$\in$ X$\cup$ Y gilt: a und b sind in G benachbart :$\Leftrightarrow$ b=f(a) oder b=g(a).
Da f und g Bijektionen sind, sind solche Orbits entweder identisch oder disjunkt. Daraus folgt, dass die Menge aller Orbits welche von einem x$\in$ X erzeugt werden eine Partition von X$\cup$ Y ist.
Es ergeben sich folgende Muster:

I. $X \to Y \to X \to Y \to ...$

II. $Y \to X \to Y \to X \to ...$

III. $... \to Y \to X \to Y \to X \to ...$

IV. $X \to Y \to X \to Y$

$\uparrow \qquad\qquad \downarrow$

$Y \leftarrow ... \leftarrow Y \leftarrow X$

Definiere nun Φ wie folgt:
(a) Wenn x einen Orbit vom Typ I, III oder IV erzeugt, dann setze Φ(x)=f(x)
(b) Wenn x einen Orbit vom Typ II, dann $\Phi(x) = g^{-1}(x)$

Nun ist es leicht noch nachzurechnen, dass Φ bijektiv ist. Q.e.d.

2 eulersche Graphen

Definition: Ein **Kantenzug** der Länge k in einem Graphen G ist eine nichtleere Folge $v_0 e_0 v_1 e_1 ... e_{k-1} v_k$ von abwechselnd Ecken und Kanten aus G, mit $e_i = v_i, v_{i+1}$ für alle i<k. Ist $v_0 = v_k$, so heißt der Kantenzug **geschlossen**. Ein geschlossener Kantenzug in einem Graphen G heißt **eulersch**, genau dann wenn jede Kante des Graphen genau ein mal enthalten ist. Somit ist ein Graph eulersch, wenn er einen eulerschen Kantenzug enthält.

Satz: Ein zusammenhängender Graph ist genau dann eulersch, wenn jede seiner Ecken geraden Grad hat.
Beweis: "⇒" Sei G ein eulerscher Graph und P ein geschlossener Kantenzug von G, so ist offensichtlich, dass jede Ecke geraden Grad hat, denn für jede Kante die in einer Ecke endet muss eine andere neue Kante von dieser Ecke wegfüren, weswegen der Grad gerade sein muss.
"⇐" Sei G ein zusammenhängender Graph , wo jede Ecke geraden Grades ist. Führe nun eine Induktion nach ‖G‖:
Ist ‖G‖=0 so ist die Behauptung trivial.
IV: Für alle Graphen H wo alle Ecken geraden Grad haben und ‖H‖ < ‖G‖ gilt, gelte die Behauptung.
IS: Sei ‖G‖>2. Sei W ein geschlossener Kantenzug maximaler Länge von G und F seine Kantenmenge. Diesen kann ich wählen, da der Graph endlich ist. Ist F=E(G), so ist W eulersch. Deshalb nehme an: G':=G-F enthalte mindestens eine Kante. Da alle Ecken aus G geraden Grad haben, bzw. alle Ecken des Kantenzugs geraden Grades sind, folgt, dass auch alle aus G' geraden Grad besitzen. Da G zusammenhängend ist, hat G' eine mit W indizente Kante e. Aus der Induktionsvoraussetzung ergibt sich für die Komponente C von G' die e enthält, dass diese einen eulerschen Kantenzug besitzt. Somit wäre aber W mit einem eulerschen Kantenzug aus C ergänzt, länger als W, womit W kein Kantenzug maximaler Länge wäre und es folgt per Widerspruch, dass F=E(G) und somit G eulersch. Q.e.d.