# 2-zusammenhängede Graphen

**Proseminar Graphentheorie**

Tizian Weber

Sei im Folgenden stets $G = (V, E)$ ein Graph.

## Definition

G heißt 2-zusammenhängend, wenn folgende equivalente Definitionen gelten:

1. Je zwei Ecken von G sind durch mindestens 2 kreuzungsfreie Wege verbunden.
2. $|G| > 2$ und $\forall x \in V$ gilt, dass $G - x$ zusammenhängend ist.
3. G besitzt keine Artikulation.

## Bemerkung

Kreise sind die einfachsten 2-zusammenhängene Graphen.

## Proposition

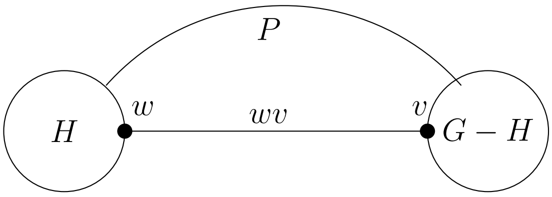
Man erhält induktiv genau alle 2-zusammenhängende Graphen, indem man von einem Kreis ausgehend zu einem bereits so konstruieren Graphen H einen H-Weg hinzufügt.
*Beweis:*

$\Longrightarrow$

Sei $H$ ein bereits so konstuierter 2-zusammenhängender Graph. Fügt man einen $H$-Weg $P$ hinzu, so bleibt der neu entstadene Graph $H'$ 2-zusammenhängend. Entfernt man nämlich eine Ecke von $H$, so ist $H$ weiterin zusammenhängend und immernoch durch mindestens eine der Endecken von $P$ mit $P$ verbunden. Wird eine Ecke von $P \backslash H$ entfernt, so bleibt natürlich $H$ 2-zusammenhängend und jede andere Ecke von $P$ ist durch eine seiner Endecken mit $H$ verbunden. Somit ist $H'$ 2-zusammenhängend.

$\Longleftarrow$

Sei $G$ ein 2-zusammenhängender Graph.
Es ist $2 \leq \kappa(G) \leq \delta(G)$ und somit gilt, dass $G$ einen Kreis der Länge mindestens $\delta(G)+1 = 3$ enthält. Von diesem aus lässt sich ein maximaler Teilgraph $H$ von $G$ wie angegeben konstruieren. Da alle $xy \in E(G)\backslash E(H), x, y \in H$ einen H-Weg definieren, ist $H$ sogar ein Untergraph von $G$. Angenommen $H \neq G$, dann existiert aufgrund des Zusammenhangs von $G$ ein $v \in G - H$ und ein $w \in H$ mit $vw \in E(G)$.
Da $G$ 2-zusammenhängend ist, enthält $G - w$ einen Weg $P$ von $v$ nach $H$ (Ansonsten wäre $w$ eine Artikulation von G $\lightning$). Somit ist aber $wvP$ ein $H$-Weg in $G$ und $H \cup wvP$ ein größer konstruierbarer Teilgraph als $H$ $\lightning$ $\quad\Longrightarrow H = G$




$\square$

So wie man einen Graphen in seine maximal (1-) zusammenhängende Teilgraphen ( Komponenten) zerlegen kann, kann man versuchen diese Komponenten wiederum in ihre maximal 2-zusammenhängende Teilgraphen zu zerlegen. Diese Zerlegung ist aber im Allgemeinen nicht mehr disjunkt und überdeckt die Komponente auch nicht ganz. Daher schwächt man die Forderung an den 2-Zusammenhang etwas ab, und zerlegt die Komponenten stattdessen in Blöcke. Diese Zerlegung überdeckt die Komponenten dann ganz und ist beinahe disjunkt.

## Definition

Ein *Block* von $G$ ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von $G$, der selbst keine Artikulation enthält. (Kann aber Artikulationen von $G$ enthalten)

## Bemerkung

1. Die maximalen 2-zusammenhängeder Teilgraphen, die Brücken und die isolierten Ecken von $G$ sind genau die Blöcke von $G$.
2. Verschiedene Blöcke schneiden sich in höchstens einer Ecke; diese ist dann eine Artikulation.
3. Jede Kante von $G$ liegt in genau einem Block
4. $G$ ist die Vereinigung seiner Blöcke