Universität Konstanz Tom-Lukas Kriel
Department of Mathematics and Statistics
Sommersemester 2018

Proseminar Graphentheorie Vortrag 12

Motivation: Findet man in großen Graphen immer gewisse feste kleine Strukturen oder können diese auch zu chaotisch sein?

Problem: Seien $k, l \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir betrachten Folgen $a = (a_1, ..., a_n)$ bestehend aus verschiedenen reellen Zahlen und fragen, ob a eine aufsteigende Teilfolge der Länge $(k+1)$ oder eine absteigende Teilfolge der Länge $(l+1)$ enthält. Wie groß müssen wir n wählen, damit die Antwort immer ja lautet.

Lemma 0.1. Im obigen Problem ist $n = kl + 1$ die kleinste Zahl so, dass die Antwort immer ja ist.

Proof. $n = kl$ reicht nicht aus: Betrachte $a = (-k, -k+1..., -1, -2k, -2k+1..., -k-1, -3k, -3k+1, ..., -(l-2)k-1, -lk, -lk+1, ..., -(l-1)k-1)$. Dann enthält a weder eine aufsteigende Teilfolge der Länge $(k+1)$ noch eine absteigende Teilfolge der Länge $(l+1)$.
$n = kl + 1$ reicht aus: Wir führen Beweis per Induktion nach $l \in \mathbb{N}$: $l = 1$: Ist $a \in \mathbb{R}^{k+1}$ eine Folge verschiedener Zahlen, so ist a aufsteigend oder es gibt $i, j \in \{1, ..., k+1\}$ mit $i < j$ aber $a_i > a_j$. Damit ist (a_i, a_j) eine absteigende Teilfolge.
Sei die Behauptung für $l - 1 \in \mathbb{N}$ gezeigt: Sei $a = (a_1, ..., a_{kl+1})$ eine Folge verschiedener reeller Zahlen. Nehme zum Widerspruch an, dass a weder eine aufsteigende Teilfolge der Länge $(k+1)$ noch eine absteigende Teilfolge der Länge $(l+1)$ enthält. Nach IV enthält a eine absteigende Teilfolge der Länge l. Sei $(a_{b(1)}, ..., a_{b(l)})$ eine solche Teilfolge mit streng monotonem b so, dass $b(l)$ minimal ist unter allen solchen Teilfolgen. Setze $c(1) = b(l)$.
Sei nun $s \in \{1, ..., k\}$ und $c(1), ..., c(s) \in \{1, ..., kl+1\}$ bereits gewählt so, dass c streng monoton wachsend ist. Nach IV besitzt $a' := a \setminus \{c(1), ..., c(s)\}$ (damit meinen wir die Folge, welche entsteht, wenn wir aus a die Einträge $c(1), ..., c(s)$ entfernen) eine absteigende Teilfolge der Länge l. Sei $(a_{b(1)}, ..., a_{b(l)})$ eine solche Teilfolge mit streng monotonem b so, dass $b(l)$ minimal ist unter allen solchen Teilfolgen. Setze $c(s+1) = b(l)$. Insgesamt erhalten wir c streng monton wachsend und die Folge $(a_{c(1)}, ..., a_{c(k+1)})$ muss aufsteigend sein, ansonsten hätte a eine absteigende Teilfolge der Länge $l+1$. Das ist ein Widerspruch. □

Definition 0.2. Sei K^r (bzw. $\overline{K^r}$) der Graph auf r Ecken, in dem je zwei Ecken (bzw. keine zwei Ecken) durch eine Kante verbunden sind. K^r (bzw. $\overline{K^r}$) heißt vollständiger (leerer) Graph auf r Ecken

Lemma 0.3. Im obigen Problem gibt es $n \in \mathbb{N}$ so, dass die Antwort ja ist.

Proof. Sei $a = (a_1, ..., a_n)$ eine Folge verschiedener reeller Zahlen. Wir definieren den Graphen $G_a = (V_a, E_a)$ mit $V_a = \{1, ..., n\}$ und $(i, j) \in E_a$ wenn $i < j$ und $a_i < a_j$. Enthält G_a den K_r (bzw. $\overline{K_r}$) als induzierten Teilgraphen, so korrespondiert dieser zu einer aufsteigenden (bzw. absteigenden) Teilfolge der Länge r. Damit folgt die Aussage aus folgendem Satz von Ramsey. □

Satz 0.4. (Satz von Ramsey) (a) Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ so, dass jeder Graph G auf mindestens n Ecken K_r oder $\overline{K_r}$ als i. Teilgraph enthält.
(b) Seien $r, t \in \mathbb{N}$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ so, dass für jede "Fürbung" $c : E(K_n) \to \{1, ..., t\}$ (wir stellen uns eine Fürbung als eine Funktion vor, welche Kanten Farben zuordnet. Im Gegensatz zu einer Färbung müssen aber adjazente Kanten nicht unterschiedlich gefärbt sein) eine r-elementige Teilmenge W der Ecken von K_n so, dass c auf den Kanten von $K_n[W]$ konstant ist.
(c) Sei $k \in \mathbb{N}$. Für jede "Fürbung" $c : E(K_\infty) \to \{1, ..., t\}$ existiert eine unendliche Teilmenge W der Ecken von K_∞ so, dass c auf den Kanten von $K_\infty[W]$ konstant ist.

Proof. (c) Wähle $x_1 \in K_\infty$ beliebig und setze $X_1 = K_\infty \setminus \{x_1\}$. Sind $x_1, ..., x_k$ und eine unendliche Menge $X_k \subseteq K_\infty \setminus \{x_0, ..., x_k\}$ bereits so gewählt, so gibt es ist eine der Mengen $C_j := \{x \in X_k \mid c(x, x_k) = j\}$ für $j \in \{1, ..., t\}$ zwangsläufig unendlich. Wähle ein solches $j(k)$, ein Element $x_{k+1} \in C_j$ und setze $X_k = C_j \setminus \{x_{k+1}\}$.
Seien nun $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k < l$. Dann gilt $c(x_k, x_l) = j(k)$. Wähle nun $s \in \{1, ..., t\}$ mit $j^{-1}(s)$ unendlich und setze $W = \{x_k \mid k \in j^{-1}(s)\}$.
(b) Wir benutzen das Unendlichkeitslemma: Angenommen die Behauptung ist falsch für gewisse $r, k \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann eine "falsche Fürbung" $c : E(K_n) \to \{1, ..., t\}$, d.h. eine für welche keine r-elementige Teilmenge W der Ecken von K_n existiert so, dass c auf den Kanten von $K_n[W]$ konstant ist.
Setze $V_n = \{c_n : E(K_n) \to \{1, ..., t\}$ falsche Fürbung$\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und interpretiere $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}$ als die Eckenmenge eines Graphen G. Es seien dort ein c_n und ein c_{n-1} benachbart, wenn $c_n|_{K^2_{n-1}} = c_{n-1}$. Es ist einfach zu sehen, dass die Bedingungen des Unendlichkeitslemmas erfüllt sind, welches besagt, dass es eine Folge $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $c_n \in V_n$ und $c_n|_{K^2_m} = c_m$ für $n > m$. In natürlicher Weise definiert c eine falsche Fürbung auf $E(K_\infty)$.
(a) Setze $k = 2$ und benutze (a). $\square$