
Übungsblatt 11 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (6P) (Vandermonde-Matrix)

Sei A ein kommutativer Ring. Betrachte für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, \dots, a_n \in A$ die Matrix

$$V(a_1, \dots, a_n) := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in A^{n \times n}.$$

und ihre Determinante $v(a_1, \dots, a_n) := \det V(a_1, \dots, a_n) \in A$.

- (a) Sei $n \in \mathbb{N}$, $A := \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ und $B := \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{n-1}]$. Zeige, dass $v(X_1, \dots, X_n) \in A = B[X_n]$ aufgefasst als Polynom in X_n vom Grad $n - 1$ ist, im Quotientenkörper von A genau die Nullstellen X_1, \dots, X_{n-1} hat und als Leitkoeffizienten $v(X_1, \dots, X_{n-1})$ hat.
- (b) Zeige $v(X_1, \dots, X_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)$ in $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ mittels (a) durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.
- (c) Zeige $v(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$.

Aufgabe 2. (6P) (Ringe mit genau einem maximalen Ideal)

Sei A ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (a) A ist lokal [\rightarrow 1.5.8(b)].
- (b) $A \setminus A^\times$ ist ein Ideal von A .
- (c) A besitzt genau ein maximales Ideal.
- (d) $0 \neq 1$ in A und $\forall x \in A : (x \in A^\times \text{ oder } 1 - x \in A^\times)$

Aufgabe 3. (4P) (Beispiele für lokale Ringe)

- (a) Sei A ein kommutativer Ring und \mathfrak{p} ein Primideal von A . Zeige, dass dann die Lokalisierung von A nach \mathfrak{p}

$$A_{\mathfrak{p}} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$$

ein lokaler Ring ist.

- (b) Sei $A := C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Zeige, dass $I := \{f \in A \mid \text{es gibt eine Nullumgebung } U \subseteq \mathbb{R} \text{ mit } f|_U = 0\}$ ein Ideal von A ist. Zeige, dass A/I ein lokaler Ring ist. Ist es ein Integritätsring? Ist es ein Körper?

Abgabe bis Dienstag, den 30. Juni um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.