Universität Konstanz Tom-Lukas Kriel
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2015 Franz & Sepp

Übungsblatt 13 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (6P) (Gitter von einigen Zahlringen des Grades 3)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $f := X^3 + aX + b$ ein in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibles Polynom, $x \in \mathbb{C}$ mit $f(x) = 0$ und $\mathscr{O}$ der Zahlring von $\mathbb{Q}(x)$. Setze $M := \mathbb{Z}[x]$.

(a) Zeige, dass M ein multiplikatives Gitter des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(x)$ ist.

(b) Zeige $\mathrm{d}(M) = -4a^3 - 27b^2$.

(c) Finde $a, b \in \mathbb{Z}$ so, dass f irreduzibel und $M = \mathscr{O}$.

Aufgabe 2. (2P) (Einheitswurzeln)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen $\zeta \in K$ eine *n-te Einheitswurzel* in K wenn $\zeta^n = 1$. Wir nennen ein solches ζ eine *primitive n-te Einheitswurzel*, wenn es die Ordnung n in der Gruppe $K^\times$ hat. Zeige, dass die Menge der n-ten Einheitswurzeln von K eine endliche zyklische Untergruppe von $K^\times$ ist.

Aufgabe 3. (4P) (Existenz von primitiven n-ten Einheitswurzeln)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und p die Charakteristik von K. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) K besitzt eine primitive n-te Einheitswurzel.

(b) K besitzt n verschiedene n-te Einheitswurzeln.

(c) $p \nmid n$ und $X^n - 1$ zerfällt in $K[X]$.

Aufgabe 4. (4P) (Ein Kandidat für das Minimalpolynom einer primitiven n-ten Einheitswurzel)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere mit der Notation von Aufgabe 2

$$\Phi_n = \prod_{\zeta \text{ primitive } n\text{-te Einheitswurzel in } \mathbb{C}} (X - \zeta) \subseteq \mathbb{C}[X]$$

(a) Zeige $\Phi_n \in \mathbb{Q}[X]$ mit Hilfe von Galoistheorie.

(b) Zeige

$$X^n - 1 = \prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n\} \\ k \mid n}} \Phi_k.$$

Abgabe bis Dienstag, den 14. Juli um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.