Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (5P) (Welche zyklischen Gruppen sind halbeinfach?)

Für welche $m \in \mathbb{N}_0$ ist der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halbeinfach?

Aufgabe 2. (2P) (Wie viele Informationen stecken in einer Kompositionsreihe?)

Bestimme bis auf Isomorphie alle $\mathbb{Z}$-Moduln, die eine Kompositionsreihe mit genau zwei Faktoren besitzen, die beide zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph sind.

Aufgabe 3. (4P) (Ein praktisches Beispiel zu Kompositionsreihen und Halbeinfachheit)

Sei $d \in \mathbb{N}$. Zeige, dass man die Skalarmultiplikation des $\mathbb{R}$-Vektorraums

$$\mathbb{R}[X]_d := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq d\}$$

auf genau eine Weise zu einer Skalarmultiplikation

$$\mathbb{R}[T] \times \mathbb{R}[X]_d \to \mathbb{R}[X]_d$$

fortsetzen kann derart, dass die abelsche Gruppe $\mathbb{R}[X]_d$ ein $\mathbb{R}[T]$-Modul wird und die Linksmultiplikation mit T die Ableitung ist, das heißt $Tf = f'$ für alle $f \in \mathbb{R}[X]_d$. Überprüfe,

- ob dieser Modul endliche Länge hat (wenn ja, gib eine Kompositionsreihe an),
- ob er halbeinfach ist (wenn ja, schreibe ihn als direkte Summe von einfachen Untermoduln),
- ob er frei ist (wenn ja gib eine Basis an) und
- ob er zyklisch ist (wenn ja, gib ein erzeugendes Element an).

Aufgabe 4. (5P) (Alltäglich benötigte Tatsachen über kurze exakte Sequenzen)

Gegeben sei eine kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$. Zeige:

(a) Ist N frei, so zerfällt die Sequenz.

(b) Ist $g'\colon N \longrightarrow M$ ein Homomorphismus mit $g \circ g' = \mathrm{id}_N$, so $M = \ker g \oplus \operatorname{im} g'$.

(c) Ist $f'\colon M \longrightarrow L$ ein Homomorphismus mit $f' \circ f = \mathrm{id}_L$, so $M = \operatorname{im} f \oplus \ker f'$.

Hinweis: Wir verbieten nicht zu rechnen, aber versuche zunächst die Aufgabe durch Kontemplation mittels der Aufgaben 1(d) und 1(e) auf dem letzten Blatt zu lösen.

Abgabe bis Dienstag, den 12. Mai um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.