Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Zahlentheorie

Definition: Für das ganze Blatt gelte: Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein fest gewählter Körper. Für $A \in K^{n \times n}$ definieren wir den $K[X]$-Modul $M_A := M_{A,K} := K^n$ durch gewöhnliche Addition und die durch

$$X \cdot_S y = Ay \quad (y \in K^n)$$
$$r \cdot_S y = ry \quad (r \in K,\ y \in K^n)$$

induzierte Skalarmultiplikation $\cdot_S$ (vgl. 1.7.4.).

Aufgabe 1. (4P) (Lineare Algebra und Moduln I)

(a) Seien K ein beliebiger Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ ähnliche Matrizen. Dann gilt

$$M_A \cong M_B.$$

(b) Sei $K = \mathbb{R}$. Finde ein $n \geq 2$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so, dass M_A einfach ist.

Aufgabe 2. (9P+3 Bonuspunkte) (Lineare Algebra und Moduln II)

Sei $K = \mathbb{C}$. Franz hat für sein Zahlentheorieseminar von seinem Professor ein sehr großes $n \in \mathbb{N}$ und Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in Jordannormalform bekommen. Er soll M_A auf einige Eigenschaften überprüfen. Leider hat es Franz noch nie geschafft, ein funktionierendes Matlabprogramm zu schreiben. Deshalb bittet er seinen Kommilitonen Sepp aus dem Numerikseminar um Hilfe. Dieser hat bedauerlicherweise nur die Lineare Algebra II gehört und kennt Moduln nicht. Wie kann Franz die folgenden Fragen in die Sprache der Linearen Algebra übersetzen, damit Sepp sie mit Matlab in endlicher Zeit beantworten kann.

(a) Was ist der Annihilator von M_A?

(b) Ist $M_A \to M_A, y \mapsto By$ ein Endomorphismus?

(c) Ist M halbeinfach?

(d) Ist M zyklisch?

(e) (Freiwilliger Zusatz) Sind M_A und M_B isomorph?

Hinweis: Franz hat von seinem Professor nur deshalb Matrizen in Jordanform bekommen, weil $M_A \cong M_{A'}$ für eine allgemeine Matrix A und deren Jordanform A' aber das Berechnen der Eigenwerte und damit auch der Jordanform keine leichte numerische Aufgabe ist.

Aufgabe 3. (3P) (Divisibilität und Torsionsfreiheit von abelschen Gruppen)

(a) Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, die divisibel ist. Zeige: G ist torsionsfrei. (siehe Blatt 2 für die Definitionen von „divisibel“ und „torsionsfrei“)

(b) Gilt selbiges auch, wenn man die Forderung, dass G endlich erzeugt ist, weglässt?

Abgabe bis Dienstag, den 26. Mai um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.