

2. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory
SS 2012: 20. April 2012

- NB** $f \in K[[x]]$ definiere Support $f := \{n \in \mathbb{N}_0; f_n \neq 0\}$
- (i) Support $f = \emptyset$ genau dann, wenn $f = 0$
 - (ii) Support f ist endlich genau dann, wenn $f \in K[x]$
 - (iii) $f \neq 0$. Support f endlich; es gilt $\deg f = \max \text{Support } f$.

Definition $f : K \rightarrow K$ ist eine *polynomiale Funktion*, falls es $c_0, \dots, c_n \in K$ gibt, so dass $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ für alle $x \in K$.

NB Eine polynomiale Funktion ist etwas anderes als ein Polynom. Wir werden die Beziehung genau analysieren.

- Satz 1** Seien $f, g \in K[x]$ und $f, g \neq 0$. Es gilt
- (i) $fg \neq 0$
 - (ii) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$
 - (iii) fg ist normiert, falls f und g normiert sind
 - (iv) fg ist skalar $\Leftrightarrow f$ und g skalar sind
 - (v) Falls $f + g \neq 0$, gilt $\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g)$

Beweis Sei $\deg f := m$ und $\deg g := n$.

Behauptung: (*) $(fg)_{m+n} = f_m g_n$ und (**) $(fg)_{m+n+k} = 0, k > 0$.

Wir berechnen $(fg)_{m+n+k} = \sum_{i=0}^{m+n+k} f_i g_{m+n+k-i}$.

Welche Beträge sind ungleich Null?

$f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow i \leq m, (f_i \neq 0)$ und $m+n+k-i \leq n$ also $m+k \leq i$.

Das heißt: $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow m+k \leq i \leq m$, i.e. $k=0$ und $m=i$, wie behauptet.

Nun implizieren (*) und (**) unmittelbar (i), (ii) und (iii). Auch (i) und (ii) implizieren (iv).

(v): ÜA, ÜB. □

Korollar 1 $K[x]$ ist eine kommutative K -Algebra mit Einheit.

Beweis $K[x]$ ist ein Unterraum von $K[[x]]$. Es genügt also zu prüfen, dass $K[x]$ unter Produkte abgeschlossen ist, i.e. $f, g \in K[x] \Rightarrow fg \in K[x]$. Dieses folgt aus Satz 1 Punkt (ii). \square

Korollar 2 $f, g, h \in K[x]; f \neq 0$. Aus $fg = fh$ folgt $g = h$.

Beweis $K[x]$ ist ein Integritätsbereich (siehe Satz 1 Punkt (i)). \square

NB

$$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \left(\sum_{r=0}^s f_r g_{s-r} \right) x^s \text{ für } f = \sum_{i=0}^m f_i x^i \text{ und } g = \sum_{i=0}^n g_i x^i.$$

$$\text{Insbesondere } cx^m dx^m = cdx^{m+n} \text{ und } fg = \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq j \leq n} f_i g_j x^{i+j}.$$

Definition Sei \mathcal{A} eine K -Algebra mit 1; $f \in K[x]; f = \sum_{i=0}^n f_i x^i; \alpha \in \mathcal{A}$.

$$\text{Definiere } f(\alpha) := \sum_{i=0}^n f_i \alpha^i \text{ mit } \alpha^0 := 1.$$

Beispiel 1 $\mathcal{A} = K$. $f \in K[x]$ bestimmt also eine polynomiale Funktion $\tilde{f} : K \rightarrow K$.

Beispiel 2 $\mathcal{A} = M_{2 \times 2}(K)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad f = x^2 + 2$$

$$f(B) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2.$$

Satz 2 \mathcal{A} ist eine K -Algebra mit 1. $f, g \in K[x]; \alpha \in \mathcal{A}, c \in K$. Es gilt

$$(i) (cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$$

$$(ii) (fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$$

Beweis Übungsaufgabe

Beispiel 1 Noch einmal: Sei $\alpha \in \mathcal{A}$ fixiert.

$$L_\alpha : \begin{matrix} K[x] & \longrightarrow & K \\ f & \longmapsto & f(\alpha) \end{matrix} \text{ ist eine lineare Funktionale.}$$

NB Beispiel $f \neq 0$, aber $\tilde{f} = 0$. $(x^p - x)$ für p Primzahl verschwindet auf \mathbb{F}_p , e.g. $f = x^3 - x = x^3 + 2x \in \mathbb{F}_3[x]$.

$f \neq 0$, weil $(f)_{n \in \mathbb{N}_0} = (0, 2, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \neq (0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$.

Aber $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ in \mathbb{F}_3 . So ist $\tilde{f} : \mathbb{F}_3 \rightarrow \mathbb{F}_3$ die Nullabbildung (mehr dazu im Übungsblatt).

Wenn aber K unendlich ist, haben wir solche Beispiele nicht! Wir werden dieses genau untersuchen.

Notation Sei $K[x]^\sim$ der K -Vektorraum der polynomialen Funktionen.

Proposition $K[x]^\sim$ ist eine K -Algebra (mit 1) versehen mit der punktweisen Multiplikation $(\tilde{f}\tilde{g})(t) := \tilde{f}(t)\tilde{g}(t); t \in K$.