

3. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory
SS 2012: 23. April 2012

Definition 1 Seien \mathcal{A} und $\tilde{\mathcal{A}}$ Algebren über K . Eine Bijektion $\sim: \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}; \alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ ist eine *Algebren-Isomorphie*, falls $\widetilde{(c\alpha + d\beta)} = c\tilde{\alpha} + d\tilde{\beta}$ und $\widetilde{(\alpha\beta)} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}, c, d \in K$ gelten.

Lagrange Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei K ein Körper, t_0, t_1, \dots, t_n $n + 1$ verschiedene Elemente aus K .

Interpolation Sei $V :=$ der K -Vektorraum der Polynome mit $\deg \leq n$ (zusammen mit 0 Polynom).

NB: $\dim V = n + 1$ (weil e.g. $\{x^0, \dots, x^n\}$ eine Basis bildet).

Sei $L_i := L_{t_i}; L_i \in V^*; 0 \leq i \leq n; L_i(f) := f(t_i)$.

Behauptung 1

$\{L_0, \dots, L_n\}$ ist eine Basis für V^* .

Beweis

Es genügt eine duale Basis $\{P_0, \dots, P_n\}$ von V zu finden. Solch eine Basis ist durch die Gleichungen

$$L_j(P_i) = \delta_{ij} \quad 0 \leq i, j \leq n \quad (*)$$

bestimmt. Wir wollen also P_0, \dots, P_n konstruieren, die $(*)$ erfüllen.

Wir definieren

$$P_i := \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - t_j}{t_i - t_j} \right)$$

(siehe Übungsblatt) □

Die Dualität liefert wie immer für alle $f \in V$

$$f = \sum_{i=0}^n f(t_i) P_i$$

“Lagrange Interpolationsformel”.

Satz 1

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K[x] & \longrightarrow & K[x]^\sim \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array} \quad \text{für } K \text{ unendlich}$$

ist eine K -Algebren-Isomorphie.

Beweis

Es ist unmittelbar zu prüfen, dass $\widetilde{f + cg} = \tilde{f} + c\tilde{g}$ und $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$. Die Abbildung ist per Definition surjektiv.

Injektiv? $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$?

Sei $\deg f = n; t_0, \dots, t_n$ verschiedene in K . Seien P_0, \dots, P_n wie in LIF und schreibe $f = \sum f(t_i) P_i$.

$$\tilde{f} = 0 \Rightarrow f(t_i) = 0 \Rightarrow f = 0. \quad \square$$

§ 3 Ideale

$K[x]$ ist ein Integritätsbereich. Es gilt
 $f, g, h \in K[x]; f \neq 0$ und $fg = fh \Rightarrow g = h$.
 Wir wollen den Divisionsalgorithmus in $K[x]$ beweisen.

Divisionsalgorithmus Seien $f, g \neq 0; \deg g \leq \deg f$.
 Es existiert genau ein $q \in K[x]$ und genau ein $r \in K[x]$, so dass
 $f = qg + r; \quad r = 0$ oder $\deg r < \deg g$.

Lemma 1 Seien $f, d \neq 0 \in K[x]$ mit $\deg d \leq \deg f$. Es gibt ein $g \in K[x]$, so dass
 $f - dg = 0$ oder $\deg(f - dg) < \deg f$.

Beweis Schreibe $\deg f := m \geq n := \deg d$.

$$f = a_m x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \quad a_m \neq 0$$

$$d = b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \quad b_n \neq 0$$

Betrachte $\frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} (b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i) = a_m x^m + \dots$

Also ist $f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \neq 0$ und $\deg(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d) < \deg f$.

Setze also $g := (\frac{a_m}{b_n}) x^{m-n}$. □

Satz 2 (Divisionsalgorithmus)
 Seien $f, d \in K[x]; d \neq 0$. Es existieren $q, r \in K[x]$, so dass

- (i) $f = dq + r$
- (ii) $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$.

Ferner sind q, r mit (i) und (ii) eindeutig.

Beweis **Existenz:** Sei $f \neq 0$. Lemma 1 ergibt, dass ein $g \in K[x]$ existiert, so dass
 $f - dg = 0$ oder $\deg(f - dg) < \deg f$. Wenn $f - dg \neq 0$ und $\deg(f - dg) \geq \deg d$, folgt aus Lemma 1, dass ein $h \in K[x]$ existiert, so dass $(f - dg) - dh = 0$
 oder $\deg(f - d(g + h)) < \deg(f - dg)$.

Die Fortsetzung ergibt $\dots < \deg(f - d(g + h)) < \deg(f - dg) < \deg f$. Die
 Prozedur muss nach endlich vielen Schritten anhalten. Wir bekommen also
 $q \in K[x]$ und $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$ mit $f = dq + r$.

Eindeutigkeit: Sei $f = dq_1 + r_1 = dq + r \Rightarrow d(q - q_1) = (r_1 - r)$ mit $r_1 = 0$
 oder $\deg r_1 < \deg d$.

$q - q_1 \neq 0 \Rightarrow d(q - q_1) \neq 0$ und $\deg(r_1 - r) = \deg d + \deg(q - q_1)$.

Aber $\deg(r_1 - r) \leq \max(\deg r_1, \deg r) < \deg d$ - ein Widerspruch.

So $q - q_1 = 0$ und damit $r_1 - r = 0$.

Definition 2 $f, d \in K[x]; d \neq 0$.
 d teilt f oder f ist durch d teilbar oder f ist ein Vielfaches von d , wenn $r = 0$
in (Divisionsalgorithmus): $f = dq + 0$. In dem Fall heißt q Quotient.