

4. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory
SS 2012: 27. April 2012

Korollar 1 $f \in K[x]; c \in K$. Es gilt: $(x - c)$ teilt f genau dann, wenn $f(c) = 0$.

Beweis Divisionsalgorithmus $\Rightarrow f = (x - c)q + r; r = 0$ oder $\deg r < 1$, i.e., r ist Skalarpolynom. Also $f(c) = r(c) = r$.
 Also $r = 0$ genau dann, wenn $f(c) = 0$. □

Definition $c \in K$ ist eine *Nullstelle*, wenn $f(c) = 0$. Abbreviation: "NS von f in K ". (Also c ist Nullstelle von f genau dann, wenn $(x - c)$ teilt f .)

Korollar 2 Sei $f \in K[x]$ mit $\deg f = n$. Dann hat f höchstens n Nullstellen in K .

Beweis $\deg f = 0$, also ohne Einschränkung $\deg f \geq 1 \Rightarrow f \neq 0$ (Skalarpolynom) \Rightarrow keine Nullstelle in K .
 $\deg f = 1 \Rightarrow f = ax + c; a \neq 0$ und $ax + c = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{-c}{a}$ als eindeutige Induktionsannahme für $n - 1$ gilt.
 Sei a eine Nullstelle von f in K , also $f = (x - a)q; \quad \deg q = n - 1$.
 Nun ist $f(b) = 0$ genau dann, wenn $b = a$ oder b eine Nullstelle von q in K ist.
 Induktionsannahme $\Rightarrow q$ hat höchstens $(n - 1)$ Nullstellen, also hat damit f höchstens n Nullstellen. □

§ 4 Formale Ableitungen

$$f = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n := f^{(0)} \text{ (Konvention)}$$

$$f^{(1)} := f' = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1} := Df$$

Bemerkung 1 $D(f + cg) = D(f) + cD(g)$; $f, g \in K[x]$ und $c \in K$.
So ist D ein linearer Operator: $D : K[x] \rightarrow K[x]$.

Notation $f^{(2)} = f'' = D^2f := D(D(f))$
 $f^{(3)} = D^3(f)$ usw.; D^n sind alle lineare Operatoren.

Satz 1 (Taylor's Formel)
Seien $\text{Char}(K) = 0$; $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in K$, $p \in K[x]$ und $\deg p \leq n$.
Es gilt:
$$p = \sum_{i=0}^n p^{(i)}(a) \frac{1}{i!} (x - a)^i \tag{*}$$

Beweis Sei (wieder wie in LIS) V der K -Vektorraum der Polynome von $\deg \leq n$ (und das 0 Polynom). Betrachte: $l_i : V \rightarrow K$; $l_i(p) := p^{(i)}(a)$; $l_i \in V^*$ für alle $i = 0, \dots, n$.
Setze $p_i := \frac{1}{i!} (x - a)^i$. Es gilt $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ (siehe Übungsblatt).
also sind p_0, \dots, p_n und l_0, \dots, l_n zueinander Dual-Basen von V und V^* .
Also
$$p = \sum_{i=0}^n l_i(p) p_i. \tag{\square}$$

Bemerkung (1) $1, (x - a), \dots, (x - a)^n$ sind linear unabhängig. Also ist diese lineare Kombination (*) eindeutig.
(2) $\text{Char}(K) = 0$ wird vorausgesetzt damit $i! \neq 0$.

Definition 2 Sei $f \neq 0$ und $c \in K$ eine Nullstelle von f in K . Die *Vielfachheit* von c ist die größte $\mu \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $(x - c)^\mu$ teilt f ,
Bemerke: $1 \leq \mu \leq \deg f$.

Satz 2 Seien $\text{Char}(K) = 0$, $f \neq 0$, $\deg f \leq n$ und $c \in K$ ist eine Nullstelle von f .
Es gilt: c hat die Vielfachheit μ genau dann, wenn
$$f^{(k)}(c) = 0 \text{ bei } 0 \leq k \leq \mu - 1 \text{ und } f^{(\mu)}(c) \neq 0 \tag{\dagger}$$

Beweis "⇒" $(x - c)^\mu$ teil f und $(x - c)^{\mu+1}$ teilt nicht f . Es gibt also $g \neq 0$ mit
 $f = (x - c)^\mu g$.
Bemerke: $\deg g \leq n - \mu$ und $g(c) \neq 0$.
Die Taylor Formel liefert:
$$f = (x - c)^\mu \left[\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x - c)^m}{m!} \right].$$

Beweis “ \Rightarrow ” Fortsetzung:

$$\text{Also } f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}.$$

Da die Koeffizienten von f als lineare Kombination von $(x-c)^k$ ($0 \leq k \leq n$) eindeutig sind, ergibt ein Vergleich:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!} = \\ &g^{(0)}(c) \frac{(x-c)^\mu}{0!} + \dots + g^{(n-\mu)}(c) \frac{(x-c)^n}{(n-\mu)!}. \end{aligned} \quad (\dagger\dagger)$$

Also $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = 0$ für $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = \frac{g^{(k-\mu)}(c)}{(k-\mu)!}$ für $\mu \leq k \leq n$.

Insbesondere für $\mu = k$ erhalten wir $f^{(\mu)}(c) = g(c) \neq 0$.

“ \Leftarrow ” (*) und ($\dagger\dagger$) liefern $f = \sum_{k=\mu}^n f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!}$.

$$\begin{aligned} \text{Also } f &= (x-c)^\mu \underbrace{\left[\frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!} + \frac{f^{(\mu+1)}(c)}{\mu+1!} (x-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^{n-\mu} \right]}_{:= g} \\ &g(c) = \frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!} \neq 0. \end{aligned}$$

Also $f = (x-c)^\mu g$ mit $g(c) \neq 0$.

Wir behaupten nun: $(x-c)^{\mu+1}$ teilt f nicht, sonst hätten wir $h \in K[x]$ mit $f = (x-c)^{\mu+1}h = (x-c)^\mu(x-c)h = (x-c)^\mu g$.

$K[x]$ Integritätsbereich $\Rightarrow g = (x-c)h$. Also $g(c) = 0$. Ein Widerspruch.

□