8. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory
SS 2012: 11. Mai 2012

Lemma 2 Sei $\delta : K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$ eine alternierende lineare Form und $A \in M_{n\times n}(K)$. Es gelten:

(i) $\delta(e(A)) = \delta(A)$; e Zeilenumformung von Typ 3

(ii) $\delta(e(A)) = -\delta(A)$; e von Typ 1; $i \neq j$

(iii) $\delta(e(A) = c\delta(A))$; e von Typ 2; $c \in K; c \neq 0$.

Allgemeiner

(iv) $\delta(cA) = c^n\delta(a); c \in K$

Beweis

(i) $\delta(z_1 + cz_2, z_2, \ldots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \ldots, z_n) + c\delta(z_2, z_2, \ldots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

(ii) Folgt aus Lemma 1 (7. Vorlesung).

(iii) Folgt aus n-Linearität.

(iv) $\delta(cz_1, \ldots, cz_n) = c\delta(z_1, cz_2, \ldots, cz_n) = c^2\delta(z_1, z_2, cz_3, \ldots, cz_n) = \cdots = c^n\delta(z_1, z_2, z_2, \ldots, z_n)$. □

Lemma 3 $\delta(A) = \Delta_A\delta(\text{r.z.S.F.}(A))$, wobei $\Delta_A \in K$ und $\Delta_A \neq 0; \Delta_A$ hängt nur von $A \in M_{n\times n}(K)$ ab.

Beweis Wiederholte Anwendung von Lemma 2 (Δ_A ist ein Produkt aus der Gestalt $(-1)^\ell c_1 \cdots c_k$ für geeignete $\ell, k \in \mathbb{N}_0$ und $c_1, \ldots, c_k \in K^\times$). □

Bemerkung Für $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt die folgende Dichotomie (siehe Lineare Algebra I):
Fall 1 r.z.S.F.(A) hat eine Nullzeile oder
Fall 2 r.z.S.F.$(A) = I_n$.
Also erhalten wir hier auch eine Dichotomie:
Fall 1 $\delta(A) = \Delta_A 0 = 0$
Fall 2 $\delta(A) = \Delta_A\delta(I_n)$.

Korollar 1 $\delta \neq 0$ genau dann, wenn $\delta(I_n) \neq 0$.

Beweis

"$\Rightarrow$" Klar.

"$\Leftarrow$" $\delta(I_n) = 0 \Rightarrow \delta(A) = 0$ in beiden Fällen (1) und (2).

□

Korollar 2 $\delta(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar.

Beweis A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ r.z.S.F.$(A) = I_n$ □

Korollar 3 Seien δ_1, δ_2 n-lineare alternierende Formen auf K^n. Es gilt $\delta_1 = \delta_2$ genau dann, wenn $\delta_1(e_1, \ldots, e_n) = \delta_2(e_1, \ldots, e_n)$ (wobei wie immer $\epsilon = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standard-Basis ist). □

Definition und Notation $\mathbb{A} := alt^{(n)}(K^n) :=$ der K-Vektorraum der n-linearen alternierenden Formen auf K^n. Es ist ein Unteraum von $L^{(n)}(K^n \times \cdots \times K^n; K)$.

Korollar 4 $\dim(alt^{(n)}(K^n)) \leq 1$.

Beweis Sei $\delta_1 \neq 0$ fixiert. Sei $\delta_2 \in \mathbb{A}$.

Es gilt $\delta_2(A) = \Delta_A \ \delta_2(I_n) = \Delta_A \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \delta_1(I_n)$ $(*)$

Setze $d := \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \in K$.

Aus $(*)$ folgt $\delta_2(A) = d\Delta_A \delta_1(I_n) = d\delta_1(A)$ für $A \in M_{n\times n}(K)$.
Also ist $\delta_2 = d\delta_1$. □

Wir werden nun zeigen, dass ein $\delta \in \mathbb{A}$ existiert mit $\delta(I_n) = 1$. Solch eine Funktionale δ ist notwendig eindeutig!

Definition Die *Determinante* (Funktionale) ist die eindeutige n-lineare alternierende Form det auf K^n, wofür $\det(I_n) = 1$ gilt.

Berechnung Die Formelberechnung:
Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in M_{n\times n}(K), \delta \in \mathbb{A}$.

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben $z_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} e_{j_i}$ in der Standardbasis.

Wir berechnen:

$$\delta(A) = \delta\left(\sum_{j_i=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right) \overset{n-lin.}{=} \qquad (*)$$

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}). \qquad (**)$$

Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \{1, \ldots, n\} & \longrightarrow & \{1, \ldots, n\} \\ i & \longmapsto & j_i \end{array}.$$

Falls **nicht** injektiv, dann gibt es eine Wiederholung in $(j_1, \ldots, j_n)$ und damit ist $\delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0$.
Falls injektiv, dann ist sie eine Permutation $\pi \in S_n$ und damit ist $\delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = \delta(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)}) = sign(\pi)\delta(e_1, \ldots, e_n)$.

Also können wir nun $(**)$ umschreiben.

$$\begin{aligned}(**) &= \sum_{\pi \in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \delta(e_1, \ldots, e_n) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \delta(I_n) \\ &= \delta(I_n) \sum_{\pi \in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \qquad (***)\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $\delta(I_n) = 1$ eine Formel für δ liefert wie in $(***)$:

Satz Definiere für $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$:

$$\delta(A) := \sum_{\pi \in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \qquad \text{(det)}$$

δ ist eine n-lineare alternierende Form und erfüllt $\delta(I_n) = 1$.

Beweis Sei $0 \ne A$ diagonal; also $i \ne j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Das heißt, dass die einzige Permutation, die einen Beitrag $\ne 0$ bringt, diejenige ist, für die $i = \pi(i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, i.e. $\pi = (1)$ die Identität $\in S_n$. Es bleibt also nur ein Produkt in (det) übrig, nämlich $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \delta(A)$, insbesondere $\delta(I_n) = 1$.

- n-linear? Berechne
  $$sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)} + da'_{1\pi(1)}) a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}\right] =$$
  $$sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}) + d(a'_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)})\right]$$
  usw..... Übungsaufgabe.

- alternierend?
  Sei $z_1 = z_2$, i.e. $a_{1j} = a_{2j}$ für alle $1 \le j \le n$, i.e. $a_{1\pi(j)} = a_{2\pi(j)}$ für alle $\pi \in S_n$ und $1 \le j \le n$.

  Berechne (mit $S_n = A_n \cup A_n(12)$)
  $$\begin{aligned}\delta(A) &= \sum_{\pi \in A_n \cup A_n(12)} sign(\pi)\ a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} \\ &= \left(\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} sign(\pi)\ a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}}_{(I)}\right) + \\ &\quad \left(\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} [sign(\pi)(12)]\ a_{1\pi(12)(1)}\ a_{1\pi(12)(2)}\ a_{3\pi(12)(3)} \cdots a_{n\pi(12)(n)}}_{(II)}\right)\end{aligned}$$

In der Summe (II) bekommen wir:

$$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(2)}\ a_{1\pi(1)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} =$$
$$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

Wir sehen also, die Termen kürzen sich ab, i.e. in (I) bzw. (II): $a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$ und $-a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$, i.e. $(I) + (II) = 0$. □

Korollar 5 $\dim(\mathbb{A}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.