9. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory

SS 2012: 14. Mai 2012

Korollar 1
$$\dim(alt^{(n)}(K^n)) = 1.$$
Das heißt $\delta(A) = \det(A)\delta(I_n)$ für $A \in M_{n\times n}(K)$ und $\delta \in alt^{(n)}$.

Beweis Da $\det \in alt^{(n)}$ und $\det \neq 0$, ist $\dim(alt^{(n)}) = 1$.
Sei $\delta \in alt^{(n)}$. Also ist $\delta = d\det$ für $d \in K$. Nun muss gelten $\delta(I_n) = d\det(I_n)$, also $d = \delta(I_n)$. □

Bemerkung Sei R ein kommutativer Ring mit 1. $\delta \in alt^{(n)}(R^n)$ ist analog definiert. Der Hauptsatz gilt auch in diesem erweiterten Rahmen:
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$; $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$. Definiere:
$$\det(A) := \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}.$$
Dann ist det die eindeutige Funktionale $\delta \in alt^{(n)}(R^n)$ mit der Eigenschaft $\delta(I_n) = 1$.

Beispiel $R = K[x]$.
$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$$
Sei $\delta \in alt^{(3)}(M_{3\times 3}(R)) : \delta(A) = \delta(x\varepsilon_1 - x^2\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3)$,
wobei $\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0)$ und $\varepsilon_3 = (0,0,1)$ (die Standard-Vektoren).
$$\begin{aligned}\delta(A) &= x\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) \\ &= x\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1) + x^4\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1) - x^5\delta(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_3) \\ &= (x^4 + x^2)\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3).\end{aligned}$$

Satz 1 Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Es gilt: $\det(A) = \det(A^T)$.

Erinnerung $(A^T)_{ji} = A_{ij}$ oder $a^T_{ji} = a_{ij}$

Beweis Betrachte
$$\prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = \prod_{i,j=1, j=\pi(i)}^n a_{ij} = \prod_{i,j=1, i=\pi^{-1}(j)}^n a_{ij} = \prod_{j=1}^n a_{\pi^{-1}(j)j} = \prod_{j=1}^n a^T_{j\pi^{-1}(j)}$$
für $\pi \in S_n$.

Wir berechnen nun
$$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)\prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = \sum_{\pi^{-1}\in S_n} sign(\pi^{-1})\prod_{j=1}^n a_{j\pi^{-1}(j)} = \det(A^T).$$ □

Satz 2 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, für $A, B \in M_{n\times n}(R)$.

Beweis Fixiere $B \in M_{n\times n}(R)$. Definiere $\delta_B(A) := \det(AB)$; $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ --- \\ .... \\ --- \\ z_n \end{pmatrix}$.

Also $\delta_B(z_1, \dots, z_n) = \det(z_1 B, \dots, z_n B)$.

n linear?
$\delta_B(z_1 + cz_1', z_2, \dots, z_n) = \det((z_1 + cz_1')B, \dots, z_n B) =$
$\det(z_1 B, z_2 B, \dots, z_n B) + c\det(z_1' B, z_2 B, \dots, z_n B)$.

alternierend?
$\delta_B(z_1, z_1, \dots, z_n) = \det(z_1 B, z_1 B, \dots, z_n B) = 0$.
$\dim(alt^{(n)}) = 1 \Rightarrow \delta_B(A) = \det(A)\delta_B(I_n) = \det(A)\det(B)$. □

Korollar Sei A invertierbar. Es gilt $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$.

Beweis $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. □

Notation Sei $A \in M_{n\times n}(R)$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$ fixiert.
$A[i \mid j]$ ist die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die man nach Entfernung der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A bekommt.
$D_{ij}(A) := \det(A[i \mid j])$.

Satz 3 Fixiere j mit $1 \le j \le n$. Betrachte

$$\delta(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$

Es ist $\delta \in alt^{(n)}$ und $\delta(I_n) = 1$.

Korollar (Spaltenentwicklung:)
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Für jedes $1 \le j \le n$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$

Beweis von Satz 3:
für $A = I_n$; $a_{ij} = 0$, wenn $i \ne j$. Also betrachte nun $i = j$, i.e. $a_{jj} = 1$.
Wir bekommen $\delta(I_n) = (-1)^{2j}.a_{jj}\det(I_{n-1}) = (-1)^{2j}.1.1 = 1$.

alternierend?
Sei $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ und seien $z_k = z_\ell$ für $k < \ell$.
Falls $i \ne k$ und $i \ne \ell$, hat $A[i \mid j]$ zwei gleiche Zeilen. So $D_{ij}(A) = 0$.

Beweis, Forts. Also betrachten wir nur $i = k$ oder $i = \ell$:

$$\begin{array}{rcl} \delta(A) & = & (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{\ell j} D_{\ell j}(A) \\ & = & (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{kj} D_{\ell j}(A) \end{array} \qquad (*)$$

weil $a_{\ell j} = a_{kj}$ ist.

Betrachte:

$$A[k \mid j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_{k-1}^- \\ z_{k+1}^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix} \text{ und } A[\ell \mid j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_k^- \\ \vdots \\ z_{\ell-1}^- \\ z_{\ell+1}^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow z_\ell^- = z_k^- \\ \text{ist hier von der} \\ k\text{-ten Zeile} \end{array}$$

(I) (II)

Ein Vergleich von (I) und (II) ergibt: $A[k \mid j]$ und $A[\ell \mid j]$ haben die gleichen Zeilen, bis auf die Permutation der Zeilen!!
Man kann aber durch wiederholte Zeilenumformunten aus Typ 1 $A[\ell \mid j]$ aus $A[k \mid j]$ erhalten, indem man die $(\ell - 1)$-te Zeile in (I) bis zur k-ten Zeile in (II) rückt. Dafür benötigt man $(\ell - 1) - k$ Transpositionen [:= Permutationen der Gestalt $(\ell - 1\ \ \ell - 2)$, dann $(\ell - 2\ \ \ell - 3)\cdots$ bis $(\ell - (\ell - k - 1)\ \ \ell - (\ell - k))$ i.e. bis $(k + 1\ \ k)$].

Zusammenfassend: Setze $\pi := (k + 1\ \ k)\cdots(\ell - 1\ \ \ell - 2); \pi \in S_{n-1}$.
$sign(\pi) = (-1)^{(\ell-1)-k}$. Also $D_{\ell j}(A) = (-1)^{(\ell-1)-k} D_{kj}(A)$.

Zurück zu $(*)$:

$$\delta(A) = (-1)^j \Big[\underbrace{(-1)^k a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{1. Term}} + \underbrace{(-1)^{2\ell-1-k} a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{2. Term}} \Big]$$

Aber $(-1)^k = -[(-1)^{2\ell-1-k}] = (-1)^{2(\ell-1)-k}$.
Also kürzen sich 1. Term und 2. Term ab und damit ist $\delta(A) = 0$ wie behauptet.

n-linear?
Hinweis: Übungsaufgabe, Übungsblatt: Zeige: für i, j fixiert ist $a_{ij} D_{ij(A)}$ eine n-lineare Funktion in A.
Eine lineare Kombination von n-linearen ist n-linear. Also ist δ n-linear. □