10. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory
SS 2012: 18. Mai 2012

Wir haben bewiesen: Für $n > 1; A$ $n \times n$ über R; für jede j-te Spalte gilt:
$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \ \det A[i \mid j] A_{ij}$.

Definition 1 $(-1)^{i+j} \det A[i \mid j]$ ist der ij-te *Kofaktor von* A.

Notation $C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A[i \mid j]$. Also $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$.

1. Behauptung $k \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = 0$.

Beweis Ersetze die j-te Spalte von A durch ihre k-te Spalte und nenne die so erhaltene Matrix B. Es gilt also: $B_{ij} = A_{ik}$ für alle i. B hat zwei gleiche Spalten, also ist $\det(B) = 0$. Nun ist $B[i \mid j] = A[i \mid j]$. Also:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \ B_{ij} \ \det B[i \mid j] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \ A_{ik} \ \det A[i \mid j] \\ &= \sum_{i=1}^{k} A_{ik} \ C_{ij} \end{aligned}$$

Damit ist Behauptung 1 bewiesen. □

Diese Eigenschaften fassen wir zusammen:
$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \ C_{ij} = \delta_{jk} \ \det(A) \qquad (*)$$

Definition 2 Die $n \times n$-Matrix $adj(A)$ ist die Transponierte der Matrix der Kofaktoren von A, das heißt $(adj \ A)_{ij} := C_{ji} = (-1)^{i+j} \ \det A[j \mid i]$.
adj (A) ist die *adjungierte Matrix* von A.

Die Formeln in $(*)$ kann man nun zusammenfassen:
$$(adj \ A)A = \det(A) I_n. \qquad (**)$$

2. Behauptung $A(adj \ A) = \det(A) I_n$.

Beweis Es ist $A^T[i \mid j] = A[j \mid i]^T$.
Also $(-1)^{i+j} \det A^T[i \mid j] = (-1)^{i+j} \det A[j \mid i]$ (ij-te Kofaktor von A^T = ji-te Kofaktor von A). Also $adj(A^T) = (adj A)^T$ $\qquad (***)$

$(**)$ impliziert für A^T: $(adj A^T)A^T = (\det A^T) I_n = (\det A) I_n$.
Also $A(adj A^T)^T = (\det A) I_n$. Zusammen mit $(***)$ erhalten wir $A(adj A) = (\det A) I_n$.
Damit ist Behauptung 2 bewiesen. □

Es gilt also: $A(adj A) = (\det A)I_n$ und $(adj A)A = \det(A)I_n$ (†).

Definition 3 $A \in M_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar, falls es $B \in M_{n\times n}(R)$ gibt, so dass $AB = BA = I_n$.
(Wenn B exisitert, dann ist B eindeutig; $B = A^{-1}$ wie für $R = K$ (Körper).)
Aus (†) sehen wir: $\det(A)$ invertierbar in R (i.e., eine Einheit von R) $\Rightarrow A$ invertierbar über R und $A^{-1} = (\det A)^{-1} adj A$.
Umgekehrt: A invertierbar $\Rightarrow AA^{-1} = I_n \Rightarrow \det(AA^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)$ ist eine Einheit in R.

Wir haben bewiesen

Satz 1 $A \in M_{n\times n}(R)$ ist invertierbar über R genau dann, wenn $\det(A)$ eine Einheit in R ist. Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = \det(A)^{-1} adj(A)$.

(Insbesondere $A \in M_{n\times n}(K)$ (K - Körper) ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$.)

Sonderfall:
$R = K[x]; f, g \in K[x]; fg = 1 \Rightarrow \deg f + \deg g = 0 \Rightarrow \deg f = \deg g = 0.$

Also sind die Einheiten von R, die $\neq 0$ sind, Skalarpolynome. A ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \in K^\times$.

Beispiel 1 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$adj(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

$\det(A) = -2$. A ist nicht invertierbar über $\mathbb{Z}$. A ist aber invertierbar als Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$ und $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 2 $R = \mathbb{R}[x]$

$A = \begin{pmatrix} x^2 + x & x + 1 \\ x - 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & x + 2 \\ x^2 - 2x + 3 & x \end{pmatrix}$

$\det(A) = x + 1$ $\det B = -6$
A nicht invertierbar B invertierbar

Lemma 2 Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinanten.

Beweis $B = P^{-1} A P$ für $A, B \in M_{n\times n}(K)$

$\det B = \det(P^{-1} AP) = \det(P)^{-1} \det(P) \det(A) = \det(A)$ □

Definition 4 $\dim(V) = n; V$ ist ein K-Vektorraum.
$T : V \longrightarrow V$ ist ein linearer Operator. Definiere $\det(T) := \det([T]_{\mathcal{B}})$ für eine (jede) Basis $\mathcal{B}$ von V.

Cramer's Formel Betrachte GS: $AX = Y$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$

Also $adj(A)AX = adj(A)Y$.

Also $(\det A)X = adj(A)Y$

Also $(\det A)x_j = \sum_{i=1}^{n} (adj A)_{ji} y_i$

Also gilt für $1 \le j \le n$, dass $(\det A)x_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} y_i \, \det A[i \mid j]$.

Hier erkennen wir die Determinante der Matrix, die man erhält, wenn man die j-te Spalte von A durch Y ersetzt.
Wenn $\det(A) \neq 0$ bekommen wir

Cramer's Regel Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $\det(A) \neq 0$.
Sei $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$.
Dann ist die eindeutige Lösung $X = A^{-1}Y$ so beschrieben:

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A},$$

wobei B_j die $n \times n$-Matrix ist, die man erhält, wenn man die j-te Spalte von A durch Y ersetzt.