14. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory

SS 2012: 4. Juni 2012

Aussage Wiederholung aus der 13. Vorlesung :
Satz von Cayley Hamilton
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V), f :=$ Char. Pol. (T).
Es gilt $f(T) = 0$, das heißt das minimale Polynom von T teilt f.

Beweis Seien $\mathcal{K}$ die Algebra der Polynome in T und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine Basis für V.
$A := [T]_{\mathcal{B}}$, das heißt $T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j$ für alle $1 \leq i \leq n$.
Wir schreiben diese Gleichungen um, als

(1) $\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}T - A_{ji}I)\alpha_j = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.
Sei B die $n \times n$-Matrix mit dem Koeffizienten in der Algebra $\mathcal{K}$ definiert durch

$$B_{ij} := \delta_{ij}T - A_{ji}I.$$

Beobachtung: $\det B = f(T)$, weil $f(x) = \det(xI - A)$ und die Einträge der Matrix $(xI - A)_{ij} = \delta_{ij}x - A_{ji}$. Also $(xI - A)_{ij}(T) = \delta_{ij}T - A_{ji}I = B_{ij}$ und somit gilt

$$f(T) = [\det(xI - A)](T) = \det[(xI - A)(T)] = \det B.$$

Wir wollen zeigen $f(T) = 0$. Also zeigen wir $(\det B)(\alpha_k) = 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Nun gelten per Definition für B_{ij} und α_j:

(2) $\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\alpha_j) = 0$ für $1 \leq i \leq n$. Setze $\tilde{B} := adj B$.

Aus (2) folgt für alle k und i: $\tilde{B}_{ki}(\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j$.
Wir summieren über i und bekommen:
$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\right)}_{kj\text{-te Koeff. von } \tilde{B}B} (\alpha_j)$.

Nun ist $\tilde{B}B = (\det B)I$, also $\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij} = \delta_{ij}\det B$.

Also $0 = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}(\det B)(\alpha_j) = (\det B)(\alpha_k)$. □

Wichtige Bemerkung Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung (e.g. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$).
$A \in Mat_{n\times n}(F_0) \subseteq Mat_{n\times n}(F_1)$.
Wir bezeichnen mit

$$\text{Char. Pol.}_{F_0}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_0}(A)$$

beziehungsweise

$$\text{Char. Pol.}_{F_1}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_1}(A)$$

die charakteristischen bzw. minimalen Polynome von A jeweils als Element aus $Mat_{n\times n}(F_0)$ und $Mat_{n\times n}(F_1)$.

Wir wollen zeigen, dass

(1) Char. Pol.$_{F_o}(A)$ = Char. Pol.$_{F_1}(A)$ und

(2) Min. Pol.$_{F_0}(A)$ = Min. Pol.$_{F_1}(A)$.

Beweis

(1) Ist einfach, weil $\det(B)$ nur von Koeffizienten der Matrix B abhängen.

(2) (i) Wir untersuchen zunächst die folgende Frage: (2) wie entscheiden wir, für den gegebenen Körper K und der natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$, ob es ein Polynom $p \in K[x]$ gibt mit deg $(p) = k$ und $p(A) = 0$?
Wir lösen ein Matrixgleichungssystem

$$A^k + x_{k-1}A^{k-1} + \cdots + x_0 I = 0 \qquad (*)$$

$(*)$ ist also ein lineares Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen in der Variablen $x_0, \ldots, x_{k-1}$. Jede Lösung $a_0, \ldots, a_{k-1} \in K$ gibt uns ein Polynom $p(x) := x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j$ mit $p(x) \in \mathcal{A}(A)$. Wenn wir $(*)$ (für die kleinste natürliche Zahl k, für die es eine Lösung gibt) gelöst haben, dann ist die Lösung $a_0, \ldots, a_{k-1}$ eindeutig, weil sie uns die eindeutig definierten Koeffizienten $1, a_{k-1}, \ldots, a_0$ von Min. Pol.$_k(A)$ liefert.

Wir folgern:
Sei k minimal, so dass $(*)$ eine Lösung in K hat, dann liefert diese Lösung das Min. Pol. (A).

(ii) Nun untersuchen wir Lösungen für LGS:
Sei $B \in Mat_{m\times n}(F_0)$, $F_0 \subseteq F_1$ Körpererweiterung, $Y \in F_0^{m\times 1}$. Betrachte

$$BX = Y \qquad \text{(S)}$$

Hat (S) eine Lösung in $F_1^{n\times 1}$, dann hat (S) auch eine Lösugn in $F_0^{n\times 1}$ (und umgekehrt natürlich!).
Dies gilt, weil die r.Z.S.F. $(B\ |Y)$ (bzgl. F_1) uns alles liefert bzgl. Existenz von Lösungen. Nun ist aber die r.Z.S.F. eindeutig! Also ist sie gleich bezüglich F_0.

Beweis, Forts. Aus (i) und (ii) sehen wir, dass $(*)$ eine Lösung $(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in F_1^k$ genau dann hat, wenn es eine Lösung in F_0^k hat. Die Eindeutigkeit des Min. Pol.$_{F_1}$ liefert außerdem, dass die Lösung in F_0^k auch $(a_0, \ldots, a_{k-1})$ sein muss! $\square$

§ 11 Trigonalisierbarkeit, invariante Unterräume

Definition 1 $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist trigonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ für V gibt, so dass $[T]_\mathcal{B}$ eine *obere Dreiecksmatrix* (i.e. $a_{ij=0}$ für $i > j$) gibt.

Satz 2 V endlich dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt: T ist trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ Char. Pol. (T) zerfällt in Linearfaktoren über K (i.e. Char. Pol. $(T) = (x-c_1)^{n_1} \cdots (x-c_k)^{n_k}$ mit $c_i \in K$).

Beweis "$\Rightarrow$" Klar, weil $[T]_\mathcal{B} = A$ eine obere Dreiecksmatrix ist, also $\det(xI - A)$ ist das Produkt $\prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$.

"$\Leftarrow$" Wir werden per Induktion eine Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ aufbauen, in der $[T]_\mathcal{B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Da T wenigstens einen Eigenwert hat, hat T auch einen Eigenvektor zum Eigenwert $c_1 \in K$. Sei $\alpha \neq 0$ solch ein Eigenvektor und ergänze zu einer Basis $\{\alpha, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ für V (geordnet, so dass α der erste Vektor davon ist).
Betrachte diesbezüglich die Matrixdarstellung von T:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \Gamma \in Mat_{(n-1)\times(n-1)}(K)$$

Sei $G \in \mathcal{L}(W,W)$, wobei $W := span\{\beta_2, \ldots, \beta_n\}$ definiert durch $Gw := \Gamma w$. Wir sehen also Char. Pol. $(T) = (x - c_i)$ Char. Pol. (G). Da Char. Pol. (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist, so ist es auch Char. Pol. (G). Die IA liefert eine Basis $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, in der G eine obere Dreiecksmatrix-Darstellung hat:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{array}\right)$$

Setze $\alpha_1 := \alpha$ und setze $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ $\square$