

16. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory
SS 2012: 15. Juni 2012

Erinnerung (Quotientenraum) und direkte Summen aus Lineare Algebra I:

- (1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. $V/W = \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$ mit $c(\alpha + W) = c\alpha + W$ für $c \in K$ und $(c\alpha + W) + (\beta + W) = (c\alpha + \beta) + W$ für $\alpha, \beta \in V$.

Bezeichnung: $\alpha + W := \bar{\alpha}$.

- (2) **Kanonischer Homomorphismus**

$$\pi : V \rightarrow V/W$$

$\pi(\alpha) := \alpha + W$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W$.

- (3) **Isomorphiesatz**

Sei $\varphi : V \rightarrow U$ ein Homomorphismus von K -Vektorräumen. Es gilt:
 $V/\ker \varphi \simeq \text{Im } \varphi$.

- (4) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Man schreibt $V = W_1 \oplus W_2$ (direkte Summe), falls $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Das heißt für alle $\alpha \in V$ existiert genau ein $(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$, so dass $\alpha = w_1 + w_2$.

Projektion Homomorphismus

$\pi : W_1 \oplus W_2 \rightarrow W_2; \pi(w_1 + w_2) := w_2$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W_1$. Also gilt

$$\frac{W_1 \oplus W_2}{W_1} \simeq W_2.$$

- (5) Die Abbildung

$$\bar{T} : V/W \rightarrow V/W$$

(für $W \subseteq V$ T -invariant, wobei $T \in \mathcal{L}(V, V)$) wird so definiert:

$$\bar{T}(\bar{\alpha}) = \bar{T}(\alpha + W) := T(\alpha) + W = \overline{T(\alpha)}.$$

Sie ist wohldefiniert, i.e. $\alpha_1 + W = \alpha_2 + W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$, weil $\alpha_1 - \alpha_2 \in W \Rightarrow T(\alpha_1 - \alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$. Sie ist auch linear (Übungsaufgabe). Also $\bar{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$.

Satz 1

Sei V endl. dim., $W \subseteq V, T \in \mathcal{L}(V, V)$ und W T -invariant. Sei \mathcal{B}' eine Basis für W , ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ von V . Es gilt:

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$ und $D = [\bar{T}]_{\bar{\mathcal{B}}''}$. ($\bar{\mathcal{B}}'' := \{\bar{\alpha}; \alpha \in \mathcal{B}''\}$)

Wir brauchen ein Lemma:

Lemma

Sei V endl. dim.

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum; $\mathcal{B}' \subseteq W$ eine Basis für W , $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ eine ergänzende Basis für V . Dann ist $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für V/W .

(2) Umgekehrt sei $\{\overline{\alpha}_{r+1}, \dots, \overline{\alpha}_n\}$ eine Basis für V/W , dann ist $\mathcal{B}' \cup \{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V . (Übungsaufgabe, Übungsblatt) \square

Beweis

Setze $r := \dim W$; B ist $r \times r$. Also ist $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$.

vom Satz

Die Aussage über B ist bereits in der 15. Vorlesung bewiesen worden.

Wir analysieren die $(n-r) \times (n-r)$ -Matrix D . Die Matrix $A = [T]_{\mathcal{B}}$ ist durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n A_{ji} \alpha_j \text{ für } 1 \leq i \leq n \tag{*}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B & [T(\alpha_{r+1})]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \\ \hline r \times r & & & \\ \hline \text{---} & & & \end{array} \right)$$

$$\mathcal{B} = \underbrace{\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}}_{|\mathcal{B}'|=r} \cup \underbrace{\{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}}_{|\mathcal{B}''|=n-r}$$

$$\overline{\mathcal{B}''} = \underbrace{\{\overline{\alpha}_{r+1}, \dots, \overline{\alpha}_n\}}_{|\mathcal{B}''|=n-r}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B & A_{1r+1} & & A_{1n} \\ \hline & \vdots & & \vdots \\ \hline \text{---} & A_{r(r+1)} & & A_{rn} \\ \hline & A_{(r+1)(r+1)} & \cdots & A_{(r+1)n} \\ \hline & \vdots & & \vdots \\ \hline & A_{n(r+1)} & & A_{nn} \end{array} \right)$$

oder für $1 \leq i \leq n$

$$T(\alpha_i) = \underbrace{\sum_{j=1}^r A_{ji} \alpha_j}_{\in W} + \sum_{j=r+1}^n A_{ji} \alpha_j \tag{**}$$

und damit ist:

$$\overline{T(\alpha_i)} = \sum_{j=r+1}^n A_{ji} \overline{\alpha_j} = \overline{T}(\overline{\alpha_i}) \text{ für } r+1 \leq i \leq n \quad \square$$

Korollar 1 Char. Pol. $T = (\text{Char. Pol. } T_W)(\text{Char. Pol. } \overline{T})$. (Für Min. Pol. T siehe Übungsblatt 8, Aufgabe 8.2.)

Korollar 2 T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Char. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Bemerkung Wir haben schon diese Tatsache bewiesen. Hier geben wir kurz einen zweiten Beweis (mit T_W und \overline{T}).

Beweis “ \Rightarrow ” wie im 1. Beweis

“ \Leftarrow ” **Per Induktion** (nach $\dim V$)

(wir wollen eine Basis \mathcal{B} für V , so dass die Matrixdarstellung von T ein Dreieck ist.)

Anfang: $n = 1$ ist trivial. I. Annahme: gilt für $n - 1$.

Sei c_1 ein Eigenwert von T und $\alpha_1 \neq 0$ ein Eigenvektor dazu.

Setze $W := \{c\alpha_1; c \in K\}$. Es ist klar, dass W T -invariant ist.

Betrachte V/W und $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$. Nun ist $\dim V/W = (n - 1)$.

Wir haben

$$\text{Char. Pol. } T = (\text{Char. Pol. } T_W)(\text{Char. Pol. } \overline{T}) \quad (\dagger)$$

$T_W \in \mathcal{L}(W, W)$ und $T_W(\alpha) = c_1\alpha$ für alle $\alpha \in W$ (weil $T(\alpha) = T(c\alpha_1) = cT(\alpha_1) = cc_1\alpha_1 = c_1c\alpha_1$ mit $\alpha = c\alpha_1$).

Also ist $A_W := [T_W]_{\{\alpha_1\}} = [c_1]$ und $\det(xI - A_W) = \det(x \cdot 1 - c_1) = (x - c_1)$.

Also bekommen wir mit (\dagger) Char. Pol. $T = (x - c_1) \text{Char. Pol. } \overline{T}$. Wir sehen also, dass auch Char. Pol. \overline{T} im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt. Die I. Annahme liefert nun eine Basis $\overline{\beta}_2, \dots, \overline{\beta}_n$ von V/W , wofür die Matrixdarstellung von \overline{T} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Setze $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ □

Nun betrachten wir diese Aussage für Min. Pol. (T).

Korollar 3 Sei V endl. dim., $T \in \mathcal{L}(V, V)$. T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Min. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Beweis Wir zeigen: Char. Pol. (T) zerfällt im Produkt von linearen Faktoren über K genau dann, wenn Min. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

“ \Rightarrow ” Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T). Da lineare Faktoren irreduzibel sind, folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorisation in $K[x]$, dass auch Min. Pol. (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist.

“ \Leftarrow ” Sei Min. Pol. (T) = $\prod_{i=1}^k (x - c_i)^{\nu_i}$.

Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T) und beide Polynome haben dieselben Nullstellen in K (und in jeder Körpererweiterung).

Beweis “ \Leftarrow ” Fortsetzung:

Also Char. Pol. $(T) = \text{Min. Pol. } (T) q(x)$ mit $q(x) \in K[x]$; nun ist $q(x)$ reduzibel in einer alg. abg. Körpererweiterung $C \supseteq K$ und zerfällt im Produkt

$$q(x) = \prod_{j=1}^{\ell} (x - d_j) \text{ über } C.$$

Wir behaupten, dass d_j bereits in K liegt und $d_j = c_i$ für geeignetes i . Dies gilt, weil d_j sonst eine Nullstelle von Min. Pol. (T) mit $d_j \in C \setminus K$ wäre (i.e. $d_j \in C$ aber $d_j \notin K$).

Dies ist aber unmöglich, da Min. Pol. (T) bereits alle seine Nullstellen in K hat. \square