21. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory

SS 2012: 2. Juli 2012

§ 16 Beziehung zum Bidual

Erinnerung **Proposition 1**: 24. Vorlesung am 27. Januar 2012
$y_0 \in V \longmapsto L_{y_0} \in V^{**}$; $L_{y_0}(f) := f(y_0)$ für alle $f \in V^*$

und

Satz 1: 24. Vorlesung am 27. Januar 2012

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & y_0 & \longmapsto & L_{y_0} \end{array}$$

ist ein (kanonischer) Isomorphismus.

Vergleiche mit

$$\begin{array}{rccc} \delta: & V & \longrightarrow & V^* \\ & y_0 & \longmapsto & y_0^* \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rccc} \gamma: & V^* & \longrightarrow & V^{**} \\ & y_0^* & \longmapsto & y_0^{**} \end{array}$$

$y_0^*(x) := (x \mid y_0)$ für alle $x \in V$ und $y_0^{**}(y^*) = (y^* \mid y_0^*)$ für alle $y^* \in V^*$

Also

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & y_0 & \longmapsto & L_{y_0} \end{array}$$

mit $L_{y_0}(y^*) := y^*(y_0)$ für $y^* \in V^*$ $\qquad (*)$

einerseits und

$$V \xrightarrow{\delta} V^* \xrightarrow{\gamma} V^{**}, \quad \gamma \circ \delta : y_0 \longmapsto y_0^{**}$$

anderserseits.

Behauptung $L_{y_0} = y_0^{**}$.

Beweis Es genügt, zu zeigen, dass $y_0^{**}(*)$ erfüllt.
Wir berechnen $y_0^{**}(y^*) = (y^* \mid y_0^*) = (y_0 \mid y) = y^*(y_0)$ □

§ 17 Hermite'sche Operatoren

Definition

(*i*) $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist *Hermite'sch* (oder selbstadjungiert), falls $T = T^*$, i.e. $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ für alle $x, y \in V$.

(*ii*) $K = \mathbb{R}$; $T = T^*$; T heißt auch *reell symmetrisch.*

(*iii*) $K = \mathbb{C}; T = T^*$ heißt auch *komplex Hermite'sch.*

Matrizendarstellungen von Hermite'schen Operatoren

Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis. Also ist $\mathcal{J} = \mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ ist Selbstdual, siehe Übungsblatt Nr. 11). Also impliziert $T = T^*$, dass A *Hermite'sch* ist, wobei

$$A := [T]_{\mathcal{X}} = [T^*]_{\mathcal{Y}} = [T^*]_{\mathcal{X}} = \overline{A^t} := A^*.$$

Das heißt $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (A ist *komplex Hermite'sch*), und im reellen Fall $a_{ij} = a_{ji}$, i.e. $A = A^t$ (A ist *symmetrisch*).

Bemerkungen Übungsaufgabe: Weitere Eigenschaften von Hermite'schen Opteratoren.

(*i*) Umgekehrt sei A Hermite'sch und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis für V mit $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Definiere $T(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i) := A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$. Dann ist T Hermite'sch.

(*ii*) T_1, T_2 sind Hermite'sch $\Rightarrow T_1 + T_2$ ist Hermite'sch.

(*iii*) $T \neq 0$ ist Hermite'sch, $\alpha \in K, \alpha \neq 0$, dann ist αT Hermite'sch genau dann, wenn $\alpha \in \mathbb{R}$.

(*iv*) T ist invertierbar und Hermite'sch genau dann, wenn T^{-1} Hermite'sch ist.

Satz 1 Seien T_1, T_2 Hermite'sch. Es gilt: T_1T_2 ist Hermite'sch genau dann, wenn $T_1T_2 = T_2T_1$.

Beweis $(T_1T_2)^* = T_1T_2 \Leftrightarrow T_2^*T_1^* = T_1T_2 \Leftrightarrow T_2T_1 = T_1T_2$ □

Satz 2

(*i*) Sei T_1 Hermite'sch, dann ist $T_2^*T_1T_2$ Hermite'sch.

(*ii*) Umgekehrt ist $T_2^*T_1T_2$ Hermite'sch und T_2 invertierbar, dann ist T_1 Hermite'sch.

Beweis (*i*) $(T_2^* T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* T_2^{**} = T_2^* T_1 T_2$

(*ii*) $T_2^* T_1 T_2 = (T_2^* T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* T_2$, multipliziert links mit $(T_2^*)^{-1}$ und rechts mit T_2^{-1} ergibt $T_1 = T_1^*$. $\square$

Definition $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist *schief Hermite'sch*, falls $T^* = -T$. (Wenn $K = \mathbb{C}$, heißt es "komplex schief Hermite'sch" und wenn $K = \mathbb{R}$, heißt es "schief symmetrisch".)

§ 18 Cartesische Zerlegung eines Operators

Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$, schreibe $T = T_1 + T_2$, wobei

$$T_1 := \frac{T + T^*}{2} \quad \text{und} \quad T_2 := \frac{T - T^*}{2}$$

Berechne:

$$T_1^* = T_1 \quad \text{und} \quad T_2^* = -T_2.$$

Also ist T_1 Hermite'sch und T_2 ist schief Hermite'sch.

Ferner T_2 ist schief Hermite'sch und $K = \mathbb{C} \Leftrightarrow T_2 = cT_3$ mit T_3 komplex Hermite'sch. Also $T = T_1 + cT_3$.