24. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory

SS 2012: 13. Juli 2012

Wir wollen nun den Spektralsatz im Fall $K = \mathbb{R}$ anwenden. Dann sind die p_i entweder linear $p_i = (x - r_i), r_i \in \mathbb{R}$ oder quadratisch irreduzibel, d.h. aus der Form $(x-a)^2 + b^2; a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

Beispiel Sei $r > 0; \theta \in \mathbb{R}; \theta \notin n\pi\mathbb{Z}$ (i.e. θ erfüllt $\sin\theta \neq 0$).
$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit Matrix (bzgl. standard orthonormale Basis $\{e_1, e_2\}$):
$A = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
A ist normal: $AA^t = A^tA$.

Sei $p =$ Char. Pol. $(T) = \det(xI - A) = (x - r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta$.
Setze $a := r\cos\theta, b := r\sin\theta, b \neq 0$.
Also ist $p = (x-a)^2 + b^2$ irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$.
Also ist Min. Pol. $T = p$.
Wir zeigen nun die Umkehrung.

Satz Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$ normal mit Min. Pol. $T := p = (x-a)^2 + b^2, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.
Es gilt: Es existieren 2-dimensionale T-invariante Unterräume $V_1, \ldots, V_s (s = \frac{n}{2}$, so dass

- (i) V_i orthogonal zu V_j ist für $i \neq j$
- (ii) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$
- (iii) V_j eine orthonormale Basis $\{\alpha_j, \beta_j\}$ hat, so dass $T\alpha_j = a\alpha_j + b\beta_j$ und $T\beta_j = -b\alpha_j + a\beta_j$ (das heißt $[T \restriction V_j]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, wobei $\{\alpha_j, \beta_j\}$ die geordnete orthonormale Basis ist) und
- (iv) Char. Pol. $(T) = p^s$
- (v) $[T^* \restriction_{V_j}]_{\{\alpha_j, \beta_i\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
- (vi) $TT^* = (a^2 + b^2)I$

(Also setze $r := \sqrt{a^2 + b^2}$, wähle θ mit $a = r\cos\theta$ und $b = r\sin\theta$. Dann ist V die orthogonale direkte Summe von 2 dimensionalen Unterräumen und die Beschränkung $T \restriction V_i$ ist "r-mal eine Drehung um die Winkel θ".)

Wir brauchen eine Bemerkung und ein Hilfslemma, bevor wir den Satz beweisen.

Bemerkung

(*i*) Sei $K = \mathbb{R}, U \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt $(U\alpha \mid \beta) = (U^*\beta \mid \alpha)$ für $\alpha, \beta \in V$.

(*ii*) Sei nun U normal, dann gilt $\|U\alpha\| = \|U^*\alpha\|$ für alle $\alpha \in V$.

Beweis

(*i*) $(U^*\beta \mid \alpha) = (\beta \mid U\alpha) = (\overline{U\alpha \mid \beta}) = (U\alpha \mid \beta)$.

(*ii*) $\|U\alpha\|^2 = (U\alpha \mid U\alpha) = (\alpha \mid U^*U\alpha) =$
$(\alpha \mid UU^*\alpha) = (U^*\alpha \mid U^*\alpha) = \|U^*\alpha\|^2$. □

Hilfslemma Sei $K = \mathbb{R}$ und S normal, so dass $S^2 + I = 0$.
Sei $\alpha \in V$ und setze $\beta := s\alpha$. Es ist $s^*\alpha = -\beta$ und $s^*\beta = \alpha$ (†)
und $(\alpha \mid \beta) = 0$ und $\|\alpha\| = \|\beta\|$.

Beweis $s\alpha = \beta$ und $s\beta = s^2\alpha = -\alpha$. Also
$0 = \|s\alpha - \beta\|^2 + \|s\beta + \alpha\|^2 = \|s\alpha\|^2 - 2(s\alpha \mid \beta) + \|\beta\|^2 + \|s\beta\|^2 + 2(s\beta \mid \alpha) + \|\alpha\|^2$.
Da S normal ist, folgt (Bemerkung + Hilfslemma)
$0 = \|s^*\alpha\|^2 - 2(s^*\beta \mid \alpha) + \|\beta\|^2 + \|s^*\beta\|^2 + 2(s^*\alpha \mid \beta) + \|\alpha\|^2 = \|s^*\alpha + \beta\|^2 + \|s^*\beta - \alpha\|^2$.
Daraus folgt (†).
Berechne nun $(\alpha \mid \beta) = (s^*\beta \mid \beta) = (\beta \mid s\beta) = (\beta \mid -\alpha) = -(\alpha \mid \beta)$. Also $(\alpha \mid \beta) = 0$.
Schließlich $\|\alpha\|^2 = (s^*\beta \mid \alpha) = (\beta \mid s\alpha) = (\beta \mid \beta) = \|\beta\|^2$. □

Beweis vom Satz Sei $\{V_1, \ldots, V_s\}$ eine maximale Menge von 2 dimensionalen Unterräumen mit den Eigenschaften:

(*i*) V_i ist orthonormal zu V_j

(iii) und

(v) $T^*\alpha_j = a\alpha_j - b\beta_j$ und $T^*\beta_j = b\alpha_j + a\beta_j$ für $1 \leq j \leq s$

Setze $W := V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$.

Behauptung: $W = V$

Sonst ist $W^\perp \neq \{0\}$ und (iii) + (v) implizieren außerdem, dass W, T und T^* invariant ist. Also ist $W^\perp$ T^* und $T^{**} = T$ invariant.
Setze $S := b^{-1}(T - aI)$. Bermerke, dass $S^* = b^{-1}(T^* - aI)$, so $S^*S = SS^*$ (S normal) und $W^\perp$ ist auch S und S^* invariant und $(T - aI)^2 + b^2 I = 0$ impliziert $S^2 + I = 0$.
Also können wir Hilfslemma für S und $W^\perp$ anwenden.
Wir bekommen

$$\begin{aligned} &\alpha \in W^\perp, \quad \|\alpha\| = 1 \\ &\beta := S\alpha, \quad \beta \in W^\perp \text{ und} \\ &S\beta = -\alpha. \end{aligned}$$

Da $T = aT + bS$ haben wir außerdem

$$\left.\begin{array}{rcl} T\alpha &=& a\alpha + b\beta \\ T\beta &=& -b\alpha + a\beta \end{array}\right\} (iii)$$

Beweis, Forts. Darüber hinaus

$$\begin{array}{rcl} S^*\alpha & = & -\beta \\ S^*\beta & = & \alpha \\ (\alpha \mid \beta) & = & 0 \text{ und} \\ \|\beta\| & = & 1. \end{array}$$

Nun ist $T^* = aI + bS^*$. Also

$$\left.\begin{array}{rcl} T^*\alpha & = & a\alpha - b\beta \\ T^*\beta & = & b\alpha + a\beta \end{array}\right\} (v)$$

Widerspruch zur maximalen Wahl von $\{V_1, \ldots, V_s\}$, also $W = V$.

Nun
$\det\begin{pmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{pmatrix} = (x-a)^2 + b^2.$
Es folgt aus (i), (ii) und (iii) nun, dass $\det(xI - T) = [(x-a)^2 + b^2]^s$. □

(vi) T ist invertierbar und $T^* = (a^2 + b^2)T^{-1}$

Beweis Aus (iii) und (v) haben wir

$$[T \restriction_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$[T^* \restriction_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ und}$$

Nun ist aber:
$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} =$
$[T^* \restriction_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}}[T \restriction_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = [T^*T \restriction_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = (a^2+b^2)I_2.$
Also $T^*T = (a^2+b^2)I$. □