Inhaltsverzeichnis zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory

SS 2012

Stichworte
Polynomalgebren, Pozentreihen 16.04.-30.04.2012 (1.-5. Vorlesung)

§ 1	Algebren	16.04.2012	Seite	1
§ 2	Die Polynomalgebra	16.04.-23.04.2012	Seite	3
§ 3	Ideale	23.04.-27.04.2012	Seite	7
§ 4	Formale Abteilungen	27.04.-30.04.2012	Seite	9
§ 5	Primzerlegung (Primfaktorisierung)	30.04.2012	Seite	12

Stichworte
Symmetrische Gruppen 04.05.2012 (6. Vorlesung)

§ 6	Symmetrische Gruppen	04.05.-07.05.2012	Seite	13

Stichworte
Existenz und Eindeutigkeit von Determinanten 07.05.-11.05.2012 (7.-8. Vorlesung)
und
Eigenschaften von Determinanten: multiplikativ, det(AB), det(A^{-1}), nach Zeilen- oder Spaltenentwicklung, Cramer's Formel 14.05.-18.05.2012 (9.-10. Vorlesung)

§ 7	Multilineare Formen	07.05.2012	Seite	19
§ 8	Alternierende multilineare Formen auf K^n	07.05.-18.05.2012	Seite	20

Stichworte
Eigenwerte, Triangularisierung, Diagonalisierung, Eigenräume, invariante Unterräume 21.05.-15.06.2012 (11.-16. Vorlesung)

§ 9	Eigenwerte und Eigenvektoren	21.05.-25.05.2012	Seite	30
§ 10	Annihilator Ideal	01.06.2012	Seite	36
§ 11	Trigonalisierbarkeit, invariante Unterräume	04.06.2012	Seite	40
§ 12	Invariante Unterräume	08.06.2012	Seite	41

Stichworte
Jordan Normalform 18.06.-22.06.2012 (17.-18. Vorlesung)

§ 13	Direkte Summen	18.06.2012	Seite	46
§ 14	Jordanketten	18.06.2012	Seite	48

Stichworte
Innere Produkte, Cauchy-Schwatz, Orthogonalität, orthogonale Basen, Cram-Schmidt-Verfahren, Riesz Darstellungssatz 25.06.-06.07.2012 (19.-22. Vorlesung)

§ 15	Lineare Funktionale	29.06.2012	Seite	56
§ 16	Beziehung zum Bidual	02.07.2012	Seite	58
§ 17	Hermite'sche Operatoren	02.07.2012	Seite	59
§ 18	Cartesische Zerlegung eines Operators	02.07.2012	Seite	61
§ 19	Isometrie	06.07.2012	Seite	62
§ 20	Orthonormal-Basis wechseln	06.07.2012	Seite	63

Stichworte
Spektralsatz, Anwendungen 06.07.-13.07.2012 (22.-24. Vorlesung)

§ 21	Spektral-Theorie	06.07.2012	Seite	64
§ 22	Orthonormale Diagonalisierung	09.07.2012	Seite	66
§ 23	Anwendungen vom Spektralsatz	09.07.2012	Seite	67

§ 1 Algebren (16. April 2012)

Erinnerung Sei K ein Körper. Eine K-*Algebra* $\mathcal{A}$ ist ein K-Vektorraum mit einer Multiplikation von Vektoren:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\beta,$$

so dass für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ und $c \in K$ gilt:

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(b) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ und $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(c) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$

Falls es $1 \in \mathcal{A}$ gibt, so dass $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ gilt, dann heißt die Algebra eine *Algebra mit Einheit*.
Falls gilt $\alpha\beta = \beta\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ heißt $\mathcal{A}$ eine *kommutative Algebra*.

Beispiel 1 $\mathcal{A} := M_{n\times n}(K)$ ist eine nicht kommutative Algebra mit Einheit

Beispiel 2 $\mathcal{A} := L(V, V)$ ist eine nicht kommutative Algebra mit Einheit

Beispiel 3 Potenzreihen Algebra
Betrachte $K^{\mathbb{N}_0} := \{f; f : \mathbb{N}_0 \to K, f \text{ Abbildung } \}$
Schreibe $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (f_0, f_1, \dots)$
Addition punktweise, i.e. $(f + g)_n := f_n + g_n$ $(*)$
Skalarmultiplikation, auch punktweise : $(cf)_n := cf_n$
Produkt: $(fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $(**)$

Proposition 1 $\mathcal{A} := K^{\mathbb{N}_0}$ mit den Verknüpfungen (wie in $(*)$ und $(**)$ erklärt) ist eine kommutative Algebra mit Einheit.

Erinnerung In Lineare Algebra I hatten wir die Axiome der K-Vektorräume für $K^{\mathbb{N}_0}$ bewiesen.

Beweis $(gf)_n = \sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} g_{n-i} f_i = \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} = (fg)_n$: kommutatives Produkt.

Beweis, Forts.

$$\begin{aligned}\big[(fg)h\big]_n &= \sum_{i=0}^{n}(fg)_i h_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j}\Big)h_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j} h_{n-i}\\ &= \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{n-i-j} = \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{(n-j)-i} = \sum_{j=0}^{n} f_j (gh)_{n-j}\\ &= \big[f(gh)\big]_n\text{: assoziatives Produkt.}\end{aligned}$$

ÜA, ÜB: Die übrigen Axiome (b) und (c).
Zeigen Sie auch, dass $1 := (1, 0, \dots, 0, \dots)$ eine Einheit ist.

Notation $x := (0, 1, 0, \dots)$ $\quad x^0 := 1$ $\quad x^n := x \cdots x$ (n-mal)

Proposition 2

(1) $x^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (1 ist die k-te Stelle) für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(2) $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ sind linear unabhängig. Also ist $K^{\mathbb{N}_0}$ unendlich dim.

Beweis Bereits in Linear Algebra I geführt.

Definition und Notation $\mathcal{A} = K^{\mathbb{N}_0}$ heißt die Algebra der Potenzreihen über K.
Sie wird bezeichnet als $\mathcal{A} := K[\![x]\!]$.

Warum Potenzreihen? Formale Schreibweise: $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.

§ 2 Die Polynom-Algebra (16. April 2012)

Notation $K[x] := \operatorname{span}\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Definition $f \in K[x]$ heißt *Polynom über K.*

Degree, Grad
Sei nun $f \neq 0$ für alle $f \in K[\![x]\!]$. Es gilt: $f \in K[x]$ genau dann, wenn es genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ exisitert mit $f_n \neq 0$ und $f_k = 0$ für alle $k > n$.

Notation, Definition
$\deg f := n$ (Grad von f ist n).

NB $\deg f = n \Leftrightarrow f = f_0x^0 + f_1x^1 + \dots + f_nx^n; f_n \neq 0.$
f_i heißen *Koeffizienten von f.*

Definition Ein Polynom dergestalt $f = f_0x^0$ ist ein *Skalarpolynom* ($\deg f = 0$ oder $f = 0$). Ein Polynom $f \neq 0$ ist normiert, falls $\deg f = n$ und $f_n = 1$.

NB $f \in K[\![x]\!]$ definiere Support $f := \{n \in \mathbb{N}_0; f_n \neq 0\}$

(*i*) Support $f = \varnothing$ genau dann, wenn $f = 0$

(*ii*) Support f ist endlich genau dann, wenn $f \in K[x]$

(*iii*) $f \neq 0$. Support f endlich; es gilt $\deg f = \max$ Support f.

Definition $f : K \longrightarrow K$ ist eine *polynomiale Funktion*, falls es $c_0, \dots, c_n \in K$ gibt, so dass $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ für alle $x \in K$.

NB Eine polynomiale Funktion ist etwas anderes als ein Polynom. Wir werden die Beziehung genau analysieren.

Satz 1 Seien $f, g \in K[x]$ und $f, g \neq 0$. Es gilt

(*i*) $fg \neq 0$

(*ii*) $\deg (fg) = \deg f + \deg g$

(*iii*) fg ist normiert, falls f und g normiert sind

(*iv*) fg ist skalar $\Leftrightarrow$ f und g skalar sind

(*v*) Falls $f + g \neq 0$, gilt $\deg (f + g) \leq \max (\deg f, \deg g)$

Beweis Sei $\deg f := m$ und $\deg g := n$.
Behauptung: $(*) \quad (fg)_{m+n} = f_m g_n$ und $(**) \quad (fg)_{m+n+k} = 0, k > 0$.
Wir berechnen $(fg)_{m+n+k} = \sum_{i=0}^{m+n+k} f_i g_{m+n+k-i}$.
Welche Beträge sind ungleich Null?
$f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow i \leq m, (f_i \neq 0)$ und $m + n + k - i \leq n$ also $m + k \leq i$.
Das heißt: $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow m + k \leq i \leq m$, i.e. $k = 0$ und $m = i$, wie behauptet.
Nun implizieren $(*)$ und $(**)$ unmittelbar (i), (ii) und (iii). Auch (i) und (ii) implizieren (iv).
(v): ÜA, ÜB. □

Korollar 1 $K[x]$ ist eine kommutative K-Algebra mit Einheit.

Beweis $K[x]$ ist ein Unterraum von $K[\![x]\!]$. Es genügt also zu prüfen, dass $K[x]$ unter Produkte abgeschlossen ist, i.e. $f, g \in K[x] \Rightarrow fg \in K[x]$. Dieses folgt aus Satz 1 Punkt (ii). □

Korollar 2 $f, g, h \in K[x]; f \neq 0$. Aus $fg = fh$ folgt $g = h$.

Beweis $K[x]$ ist ein Integritätsbereich (siehe Satz 1 Punkt (i)). □

NB

$$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \Big(\sum_{r=0}^{s} f_r g_{s-r} \Big) x^s \text{ für } f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i \text{ und } g = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i.$$

Insbesondere $cx^m dx^m = cdx^{m+n}$ und $fg = \sum_{0 \leq i \leq m} \sum_{0 \leq j \leq n} f_i g_j x^{i+j}$.

Definition Sei $\mathcal{A}$ eine K-Algebra mit 1; $f \in K[x]$; $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$; $\alpha \in \mathcal{A}$.
Definiere $f(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i$ mit $\alpha^0 := 1$.

Beispiel 1 $\mathcal{A} = K$. $f \in K[x]$ bestimmt also eine polynomiale Funktion $\tilde{f} : K \longrightarrow K$.

Beispiel 2 $\mathcal{A} = M_{2\times 2}(K)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f = x^2 + 2$$

$$f(B) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2.$$

Satz 2 $\mathcal{A}$ ist eine K-Algebra mit 1. $f, g \in K[x]; \alpha \in \mathcal{A}, c \in K$. Es gilt

(i) $(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$

(ii) $(fg)(\alpha = f(\alpha)g(\alpha)$

Beweis Übungsaufgabe

Beispiel 1 Noch einmal: Sei $\alpha \in \mathcal{A}$ fixiert.
$\begin{array}{llll} L_\alpha : & K[x] & \longrightarrow & K \\ & f & \longmapsto & f(\alpha) \end{array}$ ist eine lineare Funktionale.

NB Beispiel $f \neq 0$, aber $\tilde{f} = 0$. $(x^p - x)$ für p Primzahl verschwindet auf $\mathbb{F}_p$, e.g. $f = x^3 - x = x^3 + 2x \in \mathbb{F}_3[x]$.

$f \neq 0$, weil $(f)_{n \in \mathbb{N}_0} = (0, 2, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \neq (0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$.

Aber $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ in $\mathbb{F}_3$. So ist $\tilde{f} : \mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3$ die Nullabbildung (mehr dazu im Übungsblatt).
Wenn aber K unendlich ist, haben wir solche Beispiele nicht! Wir werden dieses genau untersuchen.

Notation Sei $K[x]^\sim$ der K-Vektorraum der polynomialen Funktionen.

Proposition $K[x]^\sim$ ist eine K-Algebra (mit 1) versehen mit der punktweisen Multiplikation $(\tilde{f}\tilde{g})(t) := \tilde{f}(t)\tilde{g}(t); t \in K$.

Definition 1 Seien $\mathcal{A}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ Algebren über K. Eine Bijektion $\sim: \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}; \alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ ist eine *Algebren-Isomorphie*, falls $(\widetilde{c\alpha + d\beta}) = c\tilde{\alpha} + d\tilde{\beta}$ und $(\widetilde{\alpha\beta}) = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}, c, d \in K$ gelten.

Lagrange Interpolation Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei K ein Körper, $t_0, t_1, \dots, t_n$ $n+1$ verschiedene Elemente aus K. Sei $V :=$ der K-Vektorraum der Polynome mit deg $\leq n$ (zusammen mit 0 Polynom).

NB: $\dim V = n + 1$ (weil e.g. $\{x^0, \dots x^n\}$ eine Basis bildet).

Sei $L_i := L_{t_i}; L_i \in V^*; 0 \leq i \leq n; L_i(f) := f(t_i)$.

Behauptung 1
$\{L_0, \dots, L_n\}$ ist eine Basis für V^*.

Beweis
Es genügt eine duale Basis $\{P_0, \dots, P_n\}$ von V zu finden. Solch eine Basis ist durch die Gleichungen
$L_j(P_i) = \delta_{ij} \qquad 0 \leq i, j \leq n$ $(*)$
bestimmt. Wir wollen also $P_0, \dots, P_n$ konstruieren, die $(*)$ erfüllen.
Wir definieren

$$P_i := \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - t_j}{t_i - t_j} \right)$$

(siehe Übungsblatt) □

Die Dualität liefert wie immer für alle $f \in V$

$$f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) P_i$$

"Lagrange Interpolationsformel".

Satz 1 Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K[x] & \longrightarrow & K[x]^{\sim} \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array} \quad \text{für } K \text{ unendlich}$$

ist eine K-Algebren-Isomorphie.

Beweis Es ist unmittelbar zu prüfen, dass $\widetilde{f + cg} = \tilde{f} + c\tilde{g}$ und $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$. Die Abbildung ist per Definition surjektiv.
Injektiv? $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$?
Sei $\deg f = n; t_o, \ldots, t_n$ verschiedene in K. Seien $P_o, \ldots, P_n$ wie in LIF und schreibe $f = \sum f(t_i) P_i$.
$\tilde{f} = 0 \Rightarrow f(t_i) = 0 \Rightarrow f = 0.$ □

§ 3 Ideale (23. April 2012)

$K[x]$ ist ein Itegritätsbereich. Es gilt
$f, g, h \in K[x]; f \neq 0$ und $fg = fh \Rightarrow g = h$.
Wir wollen den Divisionsalgorithmus in $K[x]$ beweisen.

Divisions-algorithmus Seien $f, g \neq 0; \deg g \leq \deg f$.
Es exisitert genau ein $q \in K[x]$ und genau ein $r \in K[x]$, so dass
$f = qg + r; \qquad r = 0$ oder $\deg r < \deg g$.

Lemma 1 Seien $f, d \neq 0 \in K[x]$ mit $\deg d \leq \deg f$. Es gibt ein $g \in K[x]$, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg (f - dg) < \deg f$.

Beweis Schreibe $\deg f := m \geq n := \deg d$.

$$f = a_m x^m \quad + \quad \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \qquad a_m \neq 0$$

$$d = b_n x^n \quad + \quad \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \qquad b_n \neq 0$$

Betrachte $\frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \big(b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \big) = a_m x^m + \cdots$.
Also ist $f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \neq 0$ und $\deg \big(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \big) < \deg f$.
Setze also $g := (\frac{a_m}{b_n}) x^{m-n}$. □

Satz 2 (Divisionsalgorithmus)
Seien $f, d \in K[x]; d \neq 0$. Es existieren $q, r \in K[x]$, so dass

(*i*) $f = dq + r$

(*ii*) $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$.

Ferner sind q, r mit (i) und (ii) eindeutig.

Beweis **Existenz:** Sei $f \neq 0$. Lemma 1 ergibt, dass ein $g \in K[x]$ existiert, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg (f - dg) < \deg f$. Wenn $f - dg \neq 0$ und $\deg (f - dg) \geq \deg d$, folgt aus Lemma 1, dass ein $h \in K[x]$ existiert, so dass $(f - dg) - dh = 0$ oder $\deg (f - d(g + h)) < \deg (f - dg)$.
Die Fortsetzung ergibt ... $< \deg (f - d(g + h)) < \deg (f - dg) < \deg f$. Die Prozedur muss nach endlich vielen Schritten anhalten. Wir bekommen also $q \in K[x]$ und $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$ mit $f = dq + r$.

Eindeutigkeit: Sei $f = dq_1 + r_1 = dq + r \Rightarrow d(q - q_1) = (r_1 - r)$ mit $r_1 = 0$ oder $\deg r_1 < \deg d$.
$q - q_1 \neq 0 \Rightarrow d(q - q_1) \neq 0$ und $\deg (r_1 - r) = \deg d + \deg (q - q_1)$.
Aber $\deg (r_1 - r) \leq \max (\deg r_1, \deg r) < \deg d$ - ein Widerspruch.
So $q - q_1 = 0$ und damit $r_1 - r = 0$.

Definition 2 $f, d \in K[x]; d \neq 0$.
d teilt f oder *f ist durch d teilbar* oder *f ist ein Vielfaches von d*, wenn $r = 0$ in (Divisionsalgorithmus): $f = dq + 0$. In dem Fall heißt q Quotient.

Korollar 1 $f \in K[x]; c \in K$. Es gilt: $(x - c)$ teilt f genau dann, wenn $f(c) = 0$.

Beweis Divisionsalgorithmus $\Rightarrow f = (x - c)q + r; r = 0$ oder $\deg r < 1$, i.e., r ist Skalarpolynom. Also $f(c) = r(c) = r$.
Also $r = 0$ genau dann, wenn $f(c) = 0$. □

Definition $c \in K$ ist eine *Nullstelle*, wenn $f(c) = 0$. Abbreviation: "NS von f in K". (Also c ist Nullstelle von f genau dann, wenn $(x - c)$ teilt f.)

Korollar 2 Sei $f \in K[x]$ mit $\deg f = n$. Dann hat f höchstens n Nullstellen in K.

Beweis $\deg f = 0$, also ohne Einschränkung $\deg f \geq 1 \Rightarrow f \neq 0$ (Skalarpolynom) $\Rightarrow$ keine Nullstelle in K.
$\deg f = 1 \Rightarrow f = ax + c; a \neq 0$ und $ax + c = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{-c}{a}$ als eindeutige Induktionsannahme für $n - 1$ gilt.
Sei a eine Nullstelle von f in K, also $f = (x - a)q; \quad \deg q = n - 1$.
Nun ist $f(b) = 0$ genau dann, wenn $b = a$ oder b eine Nullstelle von q in K ist.
Induktionsannahme $\Rightarrow q$ hat höchstens $(n - 1)$ Nullstellen, also hat damit f höhstens n Nullstellen. □

§ 4 Formale Abteilungen (27. April 2012)

$f = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n := f^{(0)}$ (Konvention)
$f^{(1)} := f^1 = c_1 + 2c_2x + \cdots + nc_nx^{n-1} := Df$

Bemerkung 1 $D(f + cg) = D(f) + cD(g); f, g \in K[x]$ und $c \in K$.
So ist D ein linearer Operator: $D : K[x] \longrightarrow K[x]$.

Notation $f^{(2)} = f'' = D^2f := D(D(f))$
$f^{(3)} = D^3(f)$ usw.; D^n sind alle lineare Operatoren.

Satz 1 (Taylor's Formel)
Seien Char $(K) = 0; n \in \mathbb{N}_0, a \in K, p \in K[x]$ und deg $p \leq n$.
Es gilt: $p = \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(a)\frac{1}{i!}(x-a)^i$ $(*)$

Beweis Sei (wieder wie in LIS) V der K-Vektorraum der Polynome von deg $\leq n$ (und das 0 Polynom). Betrachte: $l_i : V \longrightarrow K; l_i(p) := p^{(i)}(a); l_i \in V^*$ für alle $i = 0, \ldots, n$.
Setze $p_i := \frac{1}{i!}(x-a)^i$. Es gilt $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ (siehe Übungsblatt).
also sind $p_0, \ldots, p_n$ und $l_0, \ldots, l_n$ zueinander Dual-Basen von V und V^*.
Also $p = \sum_{i=0}^{n} l_i(p)p_i$. □

Bemerkung

(1) $1, (x-a), \ldots, (x-a)^n$ sind linear unabhängig. Also ist diese lineare Kombination $(*)$ eindeutig.

(2) Char $(K) = 0$ wird vorausgesetzt damit $i! \neq 0$.

Definition 2 Sei $f \neq 0$ und $c \in K$ eine Nullstelle von f in K. Die *Vielfachheit* von c ist die größte $\mu \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $(x-c)^\mu$ teilt f,
Bemerke: $1 \leq \mu \leq \deg f$.

Satz 2 Seien Char $(K) = 0, f \neq 0, \deg f \leq n$ und $c \in K$ ist eine Nullstelle von f.
Es gilt: c hat die Vielfachheit μ genau dann, wenn
$f^{(k)}(c) = 0$ bei $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $f^{(\mu)}(c) \neq 0$ (†)

Beweis "⇒" $(x-c)^\mu$ teil f und $(x-c)^{\mu+1}$ teilt nicht f. Es gibt also $g \neq 0$ mit $f = (x-c)^\mu g$.
Bemerke: $\deg g \leq n - \mu$ und $g(c) \neq 0$.
Die Taylor Formel liefert:
$f = (x-c)^\mu\left[\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^m}{m!}\right]$.

Beweis "⇒" Fortsetzung:

Also $f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}$.

Da die Koeffizienten von f als lineare Kombination von $(x-c)^k (0 \le k \le n)$ eindeutig sind, ergibt ein Vergleich:

$$f = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!} =$$

$$g^{(0)}(c)\frac{(x-c)^\mu}{0!} + \cdots + g^{(n-\mu)}\frac{(x-c)^n}{(n-\mu)!}. \qquad (\dagger\dagger)$$

Also $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = 0$ für $0 \le k \le \mu - 1$ und $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = \frac{g^{(k-\mu)}(c)}{(k-\mu)!}$ für $\mu \le k \le n$.

Insbesondere für $\mu = k$ erhalten wir $f^{(\mu)}(c) = g(c) \ne 0$.

"⇐" $(*)$ und $(\dagger\dagger)$ liefern $f = \sum_{k=\mu}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!}$.

$$\text{Also } f = (x-c)^\mu \underbrace{\left[\frac{f^\mu(c)}{\mu!} + \frac{f^{\mu+1}(c)}{\mu+1!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-\mu}\right]}_{:=g}$$

$$g(c) = \frac{f^\mu(c)}{\mu!} \ne 0.$$

Also $f = (x-c)^\mu g$ mit $g(c) \ne 0$.
Wir behaupten nun: $(x-c)^{\mu+1}$ teilt f nicht, sonst hätten wir $h \in K[x]$ mit $f = (x-c)^{\mu+1}h = (x-c)^\mu(x-c)h = (x-c)^\mu g$.
$K[x]$ Integritätsbereich ⇒ $g = (x-c)h$. Also $g(c) = 0$. Ein Widerspruch.
□

Definition 1 Ein K-Unterraum $M \subseteq K[x]$ ist ein *Ideal*, wenn gilt: Für alle $f \in K[x]$ und $g \in M$ ist $fg \in M$.

Beispiel 0 $M = K[x]; M = \{0\}$ sind Ideale.

Beispiel 1 Sei $d \in K[x]$ und $d \ne 0$. $M := dK[x] = \{df; f \in K[x]\}$ ist ein Ideal:

$$\left.\begin{array}{l} d1 \in M; c \in K \\ \underbrace{c(df)}_{\in M} - \underbrace{dg}_{\in M} = \underbrace{d(cf-g)}_{\in M} \end{array}\right\} \text{Unterraum}$$

$f \in K[x]$ und $df \in M \Rightarrow f(dg) = \underbrace{d(fg)}_{\in M}$.

Definition 2 $dK[x]$ heißt *Hauptideal* (mit Erzeuger d).

Beispiel 2 (Endlich erzeugtes Ideal)
Seien $d_1, \dots, d_\ell \in K[x]$. $M := d_1K[x] + \dots + d_\ell K[x]$ ist ein K-Unterraum. Es ist ein Ideal.

Sei $p \in M, p = d_1 f_1 + \dots + f_\ell f_\ell$ mit $f_1, \dots, f_\ell \in K[x]$ und sei $f \in K[x]$, dann ist $pf = d_1 \underbrace{(f_1, f)}_{\in K[x]} + \dots + d_\ell \underbrace{(f_\ell, f)}_{\in K[x]} \in M$.

Definition 3 M ist ein *endlich erzeugtes Ideal* (mit den Erzeugern $d_1, \dots, d_\ell$).
Weitere Beispiele siehe Übungsblatt.

Satz 1 Sei $0 \neq M \subseteq K[x]$ ein Ideal. Es existiert genau ein normiertes Polynom $d \in K[x]$, so dass $M = dK[x]$.

Beweis **Existenz:** Sei $d \neq 0$ und $d \in M$, $\deg d$ ist minimal und ohne Einschränkung d normiert.
Sei $f \in M$. (Divisionsalgorithmus) $\Rightarrow f = dq + r$, mit $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$.

Aber $\underbrace{r = f - dq}_{\in M}$. Also muss $r = 0$ und damit $f = dq$ sein.

Eindeutigkeit: Sei g normiert, so dass $M = gK[x]$ ist. Also existieren $0 \neq p, q \in K[x]$, so dass $d = gp$ und $g = dq$, also $d = dqp$ ist. Es folgt $\deg d = \deg d + \deg p + \deg q$. Also $\deg p = \deg q = 0$; p, q sind Skalarpolynome. Nun sind g und d normiert, also $p = q = 1$, also $d = g$. □

Korollar 1 Der normierte Erzeuger d vom Ideal $p_1K[x] + \dots + p_\ell K[x]$ ist der größte gemeinsame Teiler von $(p_1, \dots, p_\ell)$ (bezeichnet mit ggT $(p_1, \dots, p_\ell)$), das heißt $d \mid p_i$ mit $1 = i = \ell$ und aus $d_0 \mid p_i$ mit $d_0 \in K[x]$ und $1 \leq i \leq \ell$ folgt $d_0 \mid d$.

Beweis $dK[x] = p_1K[x] + \dots + p_\ell K[x]$, also $d \mid p_i$ mit $1 \leq i \leq \ell$. Ferner ist $d \in M$, also $d = p_1 q_1 + \dots + p_n q_n = d_0[g_1 q_1 + \dots + g_n q_n]$.

Definition 4 $p_1, \dots, p_\ell$ sind *relativprim*, wenn ggT $(p_1, \dots, p_e) = 1$ ist (äquivalent: $p_1K[x] + \dots + p_\ell K[x] = K[x]$).

§ 5 Primzerlegung (Primfaktorisierung) (30. April 2012)

Definition 5 $f \in K[x]$ ist reduzibel über K, wenn es $g, h \in K[x]$ gibt mit $\deg g \geq 1, \deg h \geq 1$ und $f = gh$. Sonst ist f irreduzibel. Ist f irreduzibel und $\deg f \geq 1$, so nennen wir f Primpolynome über K.
Bemerkung: f reduzibel $\Rightarrow \deg f \geq 2$.

Beispiel $f = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$ ist reduzibel über $\mathbb{C}$, aber irreduzibel über $\mathbb{R}$.

Satz 2 $p, f, g \in K[x]$, p ist ein Primpolynom. Aus $p \mid fg$ folgt $p \mid f$ oder $p \mid g$.

Beweis Ohne Einschränkung ist p normiert, so dass p irreduzibel $\Rightarrow$ die einzigen normierten Teiler von p sind 1 und p.

Sei $d := \text{ggT}\ (f, p)$, insbesondere $d = 1$ oder $d = p$. Falls $d = p$, dann $p \mid f$. Wenn $d = 1 \Rightarrow 1 = p_0 p + f_0 f$.
$p_0, f_0 \in K[x]$, also $g = f_0 f g + p_0 p g$ und $p \mid fg; p \mid p(p_0 g) \Rightarrow p \mid g$. □

Korollar 2 p ist ein Primpolynom. $p \mid f_1 \cdots f_\ell \Rightarrow$ es existiert ein $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, so dass $p \mid f_i$.

Satz 3 Sei $f \in K[x]$, f normiert und $\deg f \geq 1$. Dann ist f ein Produkt von normierten Primpolynomen. Diese Darstellung ist eindeutig, bis auf Umnummerierung.

Beweis **Existenz:** $\deg f = 1 \Rightarrow f$ irreduzibel. Es ist nichts weiter zu zeigen.
Sei nun $\deg f > 1 := n$ - Beweis per Induktion nach n. Ist f irreduzibel, dann ist nichts weiter zu zeigen.
Sonst $f = gh$ mit $n > \deg g \geq 1$ und $n > \deg h \geq 1$. Die Induktionsannahme gilt für g, h und damit bekommen wir eine Faktorisierung für f.

Eindeutigkeit: Sei $f = p_1 \cdots p_\ell = q_1 \cdots q_s$. p_i, q_i sind normierte Prim. Also $p_\ell \mid q_1 \cdots q_s$. Es folgt $p_\ell \mid q_j$ für eine gewisse $1 \leq j \leq s$. p_ℓ, q_j sind normierte Prim $\Rightarrow q_j = p_\ell$. Ohne Einschränkung nach Umnummerierung bekommen wir
$$p_\ell = q_s \qquad (*)$$
Und somit $P := p_1 \cdots p_{\ell-1} = q_1 \cdots q_{s-1}$. $\deg (P) < n$. Also gilt die Induktionsannahme, das heißt $q_1, \ldots, q_{s-1}$ ist die Umnummerierung von $p_1, \ldots, p_{\ell-1}$. Diese Tatsache zusammen mit $(*)$ beweist unsere Behauptung. □

§ 6 Die symmetrischen Gruppen S_n (Fortsetzung) (7. Mai 2012)

Definition und Notation Betrachte die folgende Untermenge von S_n:
$A_n := \{\sigma \mid \sigma \text{ ist gerade }\}$.

Es gilt: A_n ist eine Untergruppe von S_n.

[Die Einheit (1) ist gerade, also $(1) \in A_n$. Wenn $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ und $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$, wobei τ_i, γ_j Transpositionen und k, n gerade sind, dann gilt

$$\sigma\gamma = \tau_1 \cdots \tau_m \gamma_1 \cdots \gamma_k.$$

Also ist A_n abgeschlossen unter Produkt, auch $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$. Also ist A_n abgeschlossen unter Inversen.]

A_n ist die *alternierende Gruppe.*

Bemerkung $S_n = A_n \uplus$ Ungerade $= A_n \uplus U$, wobei $U :=$ Ungerade $:= \{\delta \mid \delta \text{ ist ungerade }\}$ ist die Untermenge der ungeraden Permutationen.

Die Abbildung
$A_n \longrightarrow U$
$\sigma \longmapsto (12)\sigma$
ist bijektiv. Wir folgern: $|A_n| = \dfrac{n!}{2}$.

§ 7 Multilineare Formen (7. Mai 2012)

Definition Sei K ein Körper und seien U, V K-Vektorräume.

$$\beta : U \times V \longrightarrow K$$
$$(x, y) \longmapsto \beta(x, y)$$

ist eine *bilineare Funktionale* (oder bilineare Form), falls gelten:

(1) $\beta(c_1x_1 + c_2x_2, y) = c_1\beta(x_1, y) + c_2\beta(x_2, y)$ und

(2) $\beta(x, d_1y_1 + d_2y_2) = d_1\beta(x, y_1) + d_2\beta(x_1, y_2)$

für alle $x, x_1, x_2 \in U$ und $y, y_1, y_2 \in V$ und $c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$.

Beispiel $V \times V^* \longrightarrow K$
$(x, f) \longmapsto [x, f]$, wobei $[x, f] := f(x)$.
Die definierenden Eigenschaften und Verknüpfungen in V^* liefern

(1) $[c_1x_1 + c_2x_2, f] = c_1[x_1, f] + c_2[x_2, f]$ und

(2) $[x, d_1f_1 + d_2f_2] = d_1[x, f_1] + d_2[x, f_2]$.

Notation $L^{(2)}(U \times V; K) :=$ die Menge der bilinearen Formen auf $U \times V$. Sie ist ein Vektorraum (mit den Verknüpfungen $(c_1\beta_1 + c_2\beta_2)(x, y) := c_1\beta_1(x, y) + c_2\beta_2(x, y)$ wie üblich).

Definition Seien $m \in \mathbb{N}$ und $V_1, \ldots, V_m$ K-Vektorräume. Eine *m-lineare Funktionale* (Form) (oder multilineare Funktionale vom Grad m) auf $V_1 \times \cdots \times V_m$ ist eine Abbildung $\mu : V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow K$, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{rlll} \mu(\alpha_1, \ldots, & c\alpha_i + \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & = \\ c\mu(\alpha_1, \ldots, & \alpha_i & , \ldots, \alpha_m) & + \\ \mu(\alpha_1, \ldots, & \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & \end{array}\right\} \text{ für } \alpha_i, \gamma_i \in V_i; c \in K.$$

Notation $L^{(m)}(V_1 \times \cdots \times V_m; K) := K$-Vektorraum der m-linearen Formen.

Bemerkung μ ist multilinear und falls ein i mit $\alpha_i = 0$ existiert, dann gilt $\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) = 0$.

§ 8 Alternierende multilineare Formen auf K^n (7. Mai 2012)

Definition Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$. Eine n-lineare Form

$$\delta : \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_{n\text{-mal}} \longrightarrow K$$

ist *alternierend*, falls $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $z_i = z_j$ und $i \neq j$ existieren, dann gilt $\delta(z_1, \dots, z_n) = 0$ (für $z_1, \dots, z_n \in K^n$).

Konvention δ wird auch als Abbildung auf $K^{n\times n} = Mat_{n\times n}(K)$ aufgefasst, nämlich

$$\delta(A) = \delta(z_1, \dots, z_n), \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} z_1 \\ --- \\ .... \\ --- \\ z_n \end{pmatrix};$$

i.e. z_i ist die $i$te-Zeile der $n \times n$-Matrix A.

Lemma 1 Sei δ alternierend. Es gilt:

(i) $z_1, \dots, z_n$ sind linear abhängig $\Rightarrow \delta(z_1, \dots, z_n) = 0$

(ii) $\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) = -\delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$ (für $i \neq j$).

Allgemeiner $\delta(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(n)}) = Sign(\pi)\delta(z_1, \dots, z_n)$ für $\pi \in S_n$

Beweis

(i) Ohne Einschränkung nehmen wir an $z_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i$ für geeignete $c_1, \dots, c_{n-1} \in K$.
Wir berechnen:
$\delta(z_1, \dots, z_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \delta(z_1, \dots, z_{n-1}, z_i) = 0.$

(ii) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
0 = \ & \delta(z_1, \dots, z_i + z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) = \\
& \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) + \\
& \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) = \\
& \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) + \\
& \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n) + \\
& \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j, \dots, z_n) + \\
& \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n).
\end{aligned}$$

Also:
$0 = \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) + \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$
wie behauptet. □

Bemerkung

(1) Falls Char $(K) \neq 2$ gilt auch die Umkehrung: δ erfüllt (ii) impliziert δ alternierend ist: Man nehme $z_i = z_j$ für $i \neq j$.
Also $\delta(z_1, \dots z_i, \dots, z_i, \dots, z_n) = -\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n)$. Als Char $(K) \neq 2$ gilt für alle $a \in K$: $a = -a \Rightarrow a = 0$.

(2) $\delta((a,b),(c,d)) \coloneqq ac + bd$ auf $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ ist ein Gegenbeispiel.

Lemma 2 Sei $\delta : K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$ eine alternierende lineare Form und $A \in M_{n\times n}(K)$. Es gelten:

(i) $\delta(e(A)) = \delta(A)$; e Zeilenumformung von Typ 3

(ii) $\delta(e(A)) = -\delta(A)$; e von Typ 1; $i \neq j$

(iii) $\delta(e(A) = c\delta(A))$; e von Typ 2; $c \in K; c \neq 0$.

Allgemeiner

(iv) $\delta(cA) = c^n\delta(a); c \in K$

Beweis

(i) $\delta(z_1 + cz_2, z_2, \dots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \dots, z_n) + c\delta(z_2, z_2, \dots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

(ii) Folgt aus Lemma 1 (7. Vorlesung).

(iii) Folgt aus n-Linearität.

(iv) $\delta(cz_1, \dots, cz_n) = c\delta(z_1, cz_2, \dots, cz_n) = c^2\delta(z_1, z_2, cz_3, \dots, cz_n) = \cdots = c^n\delta(z_1, z_2, z_2, \dots, z_n)$. □

Lemma 3 $\delta(A) = \Delta_A\delta(\text{r.z.S.F.}(A))$, wobei $\Delta_A \in K$ und $\Delta_A \neq 0; \Delta_A$ hängt nur von $A \in M_{n\times n}(K)$ ab.

Beweis Wiederholte Anwendung von Lemma 2 (Δ_A ist ein Produkt aus der Gestalt $(-1)^\ell c_1 \cdots c_k$ für geeignete $\ell, k \in \mathbb{N}_0$ und $c_1, \dots, c_k \in K^\times$). □

Bemerkung Für $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt die folgende Dichotomie (siehe Lineare Algebra I):
Fall 1 r.z.S.F.(A) hat eine Nullzeile oder
Fall 2 r.z.S.F.$(A) = I_n$.
Also erhalten wir hier auch eine Dichotomie:
Fall 1 $\delta(A) = \Delta_A 0 = 0$
Fall 2 $\delta(A) = \Delta_A\delta(I_n)$.

Korollar 1 $\delta \neq 0$ genau dann, wenn $\delta(I_n) \neq 0$.

Beweis

"$\Rightarrow$" Klar.

"$\Leftarrow$" $\delta(I_n) = 0 \Rightarrow \delta(A) = 0$ in beiden Fällen (1) und (2). □

Korollar 2 $\delta(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar.

Beweis A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ r.z.S.F.$(A) = I_n$ □

Korollar 3 Seien δ_1, δ_2 n-lineare alternierende Formen auf K^n. Es gilt $\delta_1 = \delta_2$ genau dann, wenn $\delta_1(e_1, \dots, e_n) = \delta_2(e_1, \dots, e_n)$ (wobei wie immer $\epsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ die Standard-Basis ist). □

Definition und Notation $\mathbb{A} := alt^{(n)}(K^n) :=$ der K-Vektorraum der n-linearen alternierenden Formen auf K^n. Es ist ein Unteraum von $L^{(n)}(K^n \times \cdots \times K^n; K)$.

Korollar 4 $\dim(alt^{(n)}(K^n)) \leq 1$.

Beweis Sei $\delta_1 \neq 0$ fixiert. Sei $\delta_2 \in \mathbb{A}$.

Es gilt $\delta_2(A) = \Delta_A\ \delta_2(I_n) = \Delta_A \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \delta_1(I_n)$ $(*)$

Setze $d := \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \in K$.

Aus $(*)$ folgt $\delta_2(A) = d\Delta_A \delta_1(I_n) = d\delta_1(A)$ für $A \in M_{n\times n}(K)$.
Also ist $\delta_2 = d\delta_1$. □

Wir werden nun zeigen, dass ein $\delta \in \mathbb{A}$ existiert mit $\delta(I_n) = 1$. Solch eine Funktionale δ ist notwendig eindeutig!

Definition Die *Determinante* (Funktionale) ist die eindeutige n-lineare alternierende Form det auf K^n, wofür $\det(I_n) = 1$ gilt.

Berechnung Die Formelberechnung:
Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in M_{n\times n}(K), \delta \in \mathbb{A}$.

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben $z_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} e_{j_i}$ in der Standardbasis.

Wir berechnen:

$$\delta(A) = \delta\left(\sum_{j_i=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right) \overset{n-lin.}{=} \quad (*)$$

$$\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \delta(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}). \quad (**)$$

Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \{1,\dots,n\} & \longrightarrow & \{1,\dots,n\} \\ i & \longmapsto & j_i \end{array}.$$

Falls **nicht** injektiv, dann gibt es eine Wiederholung in $(j_1, \dots, j_n)$ und damit ist $\delta(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$.

Falls injektiv, dann ist sie eine Permutation $\pi \in S_n$ und damit ist $\delta(e_{j_1},\dots,e_{j_n}) = \delta(e_{\pi(1)},\dots,e_{\pi(n)}) = sign(\pi)\delta(e_1,\dots,e_n)$.

Also können wir nun $(**)$ umschreiben.

$$\begin{aligned}(**) &= \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\delta(e_1,\dots,e_n)\\ &= \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\delta(I_n)\\ &= \delta(I_n)\sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)} \qquad (***)\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $\delta(I_n) = 1$ eine Formel für δ liefert wie in $(***)$:

Satz Definiere für $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$:

$$\delta(A) := \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)} \qquad \text{(det)}$$

δ ist eine n-lineare alternierende Form und erfüllt $\delta(I_n) = 1$.

Beweis Sei $0 \ne A$ diagonal; also $i \ne j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Das heißt, dass die einzige Permutation, die einen Beitrag $\ne 0$ bringt, diejenige ist, für die $i = \pi(i)$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt, i.e. $\pi = (1)$ die Identität $\in S_n$. Es bleibt also nur ein Produkt in (det) übrig, nämlich $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \delta(A)$, insbesondere $\delta(I_n) = 1$.

- n-linear? Berechne
  $sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)} + da'_{1\pi(1)})a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}\right] =$
  $sign(\pi)\left[(a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)}) + d(a'_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)})\right]$
  usw..... Übungsaufgabe.

- alternierend?
  Sei $z_1 = z_2$, i.e. $a_{1j} = a_{2j}$ für alle $1 \le j \le n$, i.e. $a_{1\pi(j)} = a_{2\pi(j)}$ für alle $\pi \in S_n$ und $1 \le j \le n$.

  Berechne (mit $S_n = A_n \cup A_n(12)$)

$$\begin{aligned}\delta(A) &= \sum_{\pi\in A_n\cup A_n(12)} sign(\pi)\; a_{1\pi(1)}\; a_{1\pi(2)}\; a_{3\pi(3)}\cdots a_{n\pi(n)}\\ &= \underbrace{\left(\sum_{\pi\in A_n} sign(\pi)\; a_{1\pi(1)}\; a_{1\pi(2)}\; a_{3\pi(3)}\cdots a_{n\pi(n)}\right)}_{(I)} +\\ &\quad \underbrace{\left(\sum_{\pi\in A_n}[sign(\pi)(12)]\; a_{1\pi(12)(1)}\; a_{1\pi(12)(2)}\; a_{3\pi(12)(3)}\cdots a_{n\pi(12)(n)}\right)}_{(II)}\end{aligned}$$

In der Summe (II) bekommen wir:

$$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(2)}\ a_{1\pi(1)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} =$$
$$\sum_{\pi \in A_n} [-sign(\pi)]\ a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

Wir sehen also, die Termen kürzen sich ab, i.e. in (I) bzw. (II): $a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$ und $-a_{1\pi(1)}\ a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$, i.e. $(I) + (II) = 0$. □

Korollar 5 $\dim(\mathbb{A}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Korollar 1

$$\dim(alt^{(n)}(K^n)) = 1.$$

Das heißt $\delta(A) = \det(A)\delta(I_n)$ für $A \in M_{n\times n}(K)$ und $\delta \in alt^{(n)}$.

Beweis Da $\det \in alt^{(n)}$ und $\det \neq 0$, ist $\dim(alt^{(n)}) = 1$.
Sei $\delta \in alt^{(n)}$. Also ist $\delta = d \det$ für $d \in K$. Nun muss gelten $\delta(I_n) = d \det(I_n)$, also $d = \delta(I_n)$. □

Bemerkung Sei R ein kommutativer Ring mit 1. $\delta \in alt^{(n)}(R^n)$ ist analog definiert. Der Hauptsatz gilt auch in diesem erweiterten Rahmen:
Sei $A \in M_{n\times n}(R); A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$. Definiere:

$$\det(A) := \sum_{\pi \in S_n} sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Dann ist det die eindeutige Funktionale $\delta \in alt^{(n)}(R^n)$ mit der Eigenschaft $\delta(I_n) = 1$.

Beispiel $R = K[x]$.

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$$

Sei $\delta \in alt^{(3)}(M_{3\times 3}(R)) : \delta(A) = \delta(x\varepsilon_1 - x^2\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3)$,
wobei $\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0)$ und $\varepsilon_3 = (0,0,1)$ (die Standard-Vektoren).

$$\begin{aligned} \delta(A) &= x\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) \\ &= x\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1) + x^4\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1) - x^5\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \\ &= (x^4 + x^2)\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Satz 1 Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Es gilt: $\det(A) = \det(A^T)$.

Erinnerung $(A^T)_{ji} = A_{ij}$ oder $a^T_{ji} = a_{ij}$

Beweis Betrachte

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \prod_{i,j=1, j=\pi(i)}^{n} a_{ij} = \prod_{i,j=1, i=\pi^{-1}(j)}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a^T_{j\pi^{-1}(j)}$$

für $\pi \in S_n$.

Wir berechnen nun
$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} sign(\pi)\prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = \sum_{\pi^{-1}\in S_n} sign(\pi^{-1})\prod_{j=1}^n a_{j\pi^{-1}(j)} = \det(A^T).$ □

Satz 2 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, für $A, B \in M_{n\times n}(R)$.

Beweis Fixiere $B \in M_{n\times n}(R)$. Definiere $\delta_B(A) := \det(AB)$; $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ --- \\ .... \\ --- \\ z_n \end{pmatrix}$.

Also $\delta_B(z_1,\dots,z_n) = \det(z_1B,\dots,z_nB)$.

n linear?
$\delta_B(z_1 + cz_1', z_2,\dots,z_n) = \det((z_1 + cz_1')B,\dots,z_nB) =$
$\det(z_1B, z_2B,\dots,z_nB) + c\det(z_1'B, z_2B,\dots,z_nB)$.

alternierend?
$\delta_B(z_1, z_1,\dots,z_n) = \det(z_1B, z_1B,\dots,z_nB) = 0$.
$\dim(alt^{(n)}) = 1 \Rightarrow \delta_B(A) = \det(A)\delta_B(I_n) = \det(A)\det(B)$. □

Korollar Sei A invertierbar. Es gilt $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$.

Beweis $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. □

Notation Sei $A \in M_{n\times n}(R)$ und $i, j \in \{1,\dots,n\}$ fixiert.
$A[i \mid j]$ ist die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die man nach Entfernung der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A bekommt.
$D_{ij}(A) := \det(A[i \mid j])$.

Satz 3 Fixiere j mit $1 \le j \le n$. Betrachte

$$\delta(A) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$

Es ist $\delta \in alt^{(n)}$ und $\delta(I_n) = 1$.

Korollar (Spaltenentwicklung:)
Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Für jedes $1 \le j \le n$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$

Beweis von Satz 3:
für $A = I_n$; $a_{ij} = 0$, wenn $i \ne j$. Also betrachte nun $i = j$, i.e. $a_{jj} = 1$.
Wir bekommen $\delta(I_n) = (-1)^{2j}.a_{jj}\det(I_{n-1}) = (-1)^{2j}.1.1 = 1$.

alternierend?
Sei $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ und seien $z_k = z_\ell$ für $k < \ell$.
Falls $i \ne k$ und $i \ne \ell$, hat $A[i \mid j]$ zwei gleiche Zeilen. So $D_{ij}(A) = 0$.

Beweis, Forts. Also betrachten wir nur $i = k$ oder $i = \ell$:

$$\begin{aligned} \delta(A) &= (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{\ell j} D_{\ell j}(A) \\ &= (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{kj} D_{\ell j}(A) \end{aligned} \qquad (*)$$

weil $a_{\ell j} = a_{kj}$ ist.

Betrachte:

$$A[k \mid j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_{k-1}^- \\ z_{k+1}^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix} \text{ und } A[\ell \mid j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_k^- \\ \vdots \\ z_{\ell-1}^- \\ z_{\ell+1}^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow z_\ell^- = z_k^- \\ \text{ist hier von der} \\ k\text{-ten Zeile} \end{array}$$

(I) (II)

Ein Vergleich von (I) und (II) ergibt: $A[k \mid j]$ und $A[\ell \mid j]$ haben die gleichen Zeilen, bis auf die Permutation der Zeilen!!
Man kann aber durch wiederholte Zeilenumformunten aus Typ 1 $A[\ell \mid j]$ aus $A[k \mid j]$ erhalten, indem man die $(\ell-1)$-te Zeile in (I) bis zur k-ten Zeile in (II) rückt. Dafür benötigt man $(\ell-1)-k$ Transpositionen [:= Permutationen der Gestalt $(\ell-1\ \ell-2)$, dann $(\ell-2\ \ell-3)\cdots$ bis $(\ell-(\ell-k-1)\ \ell-(\ell-k))$ i.e. bis $(k+1\ k)$].

Zusammenfassend: Setze $\pi := (k+1\ k)\cdots(\ell-1\ \ell-2); \pi \in S_{n-1}$.
$sign(\pi) = (-1)^{(\ell-1)-k}$. Also $D_{\ell j}(A) = (-1)^{(\ell-1)-k} D_{kj}(A)$.

Zurück zu $(*)$:

$$\delta(A) = (-1)^j \Big[\underbrace{(-1)^k a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{1. Term}} + \underbrace{(-1)^{2\ell-1-k} a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{2. Term}} \Big]$$

Aber $(-1)^k = -[(-1)^{2\ell-1-k}] = (-1)^{2(\ell-1)-k}$.
Also kürzen sich 1. Term und 2. Term ab und damit ist $\delta(A) = 0$ wie behauptet.

n-linear?
Hinweis: Übungsaufgabe, Übungsblatt: Zeige: für i, j fixiert ist $a_{ij} D_{ij(A)}$ eine n-lineare Funktion in A.
Eine lineare Kombination von n-linearen ist n-linear. Also ist δ n-linear. □

Wir haben bewiesen: Für $n > 1; A\ n \times n$ über R; für jede j-te Spalte gilt:
$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det A[i \mid j] A_{ij}$.

Definition 1 $(-1)^{i+j} \det A[i \mid j]$ ist der ij-te *Kofaktor von A.*

Notation $C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A[i \mid j]$. Also $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$.

1. Behauptung $k \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = 0.$

Beweis Ersetze die j-te Spalte von A durch ihre k-te Spalte und nenne die so erhaltene Matrix B. Es gilt also: $B_{ij} = A_{ik}$ für alle i. B hat zwei gleiche Spalten, also ist $\det(B) = 0$. Nun ist $B[i \mid j] = A[i \mid j]$. Also:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\ B_{ij}\ \det B[i \mid j] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\ A_{ik}\ \det A[i \mid j] \\ &= \sum_{i=1}^{k} A_{ik}\ C_{ij} \end{aligned}$$

Damit ist Behauptung 1 bewiesen. □

Diese Eigenschaften fassen wir zusammen:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\ C_{ij} = \delta_{jk}\ \det(A) \qquad (*)$$

Definition 2 Die $n \times n$-Matrix $adj(A)$ ist die Transponierte der Matrix der Kofaktoren von A, das heißt $(adj\ A)_{ij} := C_{ji} = (-1)^{i+j}\ \det A[j \mid i]$.
adj (A) ist die *adjungierte Matrix* von A.

Die Formeln in $(*)$ kann man nun zusammenfassen:

$$(adj\ A)A = \det(A) I_n. \qquad (**)$$

2. Behauptung $A(adj\ A) = \det(A) I_n$.

Beweis Es ist $A^T[i \mid j] = A[j \mid i]^T$.
Also $(-1)^{i+j} \det A^T[i \mid j] = (-1)^{i+j} \det A[j \mid i]$ (ij-te Kofaktor von A^T = ji-te Kofaktor von A). Also $adj(A^T) = (adj A)^T$ $\qquad (***)$

$(**)$ impliziert für A^T: $(adj A^T)A^T = (\det A^T) I_n = (\det A) I_n$.
Also $A(adj A^T)^T = (\det A) I_n$. Zusammen mit $(***)$ erhalten wir $A(adj A) = (\det A) I_n$.
Damit ist Behauptung 2 bewiesen. □

Es gilt also: $A(adj A) = (\det A) I_n$ und $(adj A)A = \det(A) I_n$ $\qquad (\dagger)$.

Definition 3 $A \in M_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar, falls es $B \in M_{n\times n}(R)$ gibt, so dass $AB = BA = I_n$.
(Wenn B exisitert, dann ist B eindeutig; $B = A^{-1}$ wie für $R = K$ (Körper).)
Aus $(\dagger)$ sehen wir: $\det(A)$ invertierbar in R (i.e., eine Einheit von R) $\Rightarrow$ A invertierbar über R und $A^{-1} = (\det A)^{-1} adj A$.
Umgekehrt: A invertierbar $\Rightarrow$ $AA^{-1} = I_n$ $\Rightarrow$ $\det(AA^{-1}) = 1$ $\Rightarrow$ $\det(A)\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)$ ist eine Einheit in R.

Wir haben bewiesen

Satz 1 $A \in M_{n\times n}(R)$ ist invertierbar über R genau dann, wenn $\det(A)$ eine Einheit in R ist. Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = \det(A)^{-1} adj(A)$.

(Insbesondere $A \in M_{n\times n}(K)$ (K - Körper) ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$.)

Sonderfall:
$R = K[x]; f, g \in K[x]; fg = 1 \Rightarrow \deg f + \deg g = 0 \Rightarrow \deg f = \deg g = 0.$

Also sind die Einheiten von R, die $\neq 0$ sind, Skalarpolynome. A ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \in K^\times$.

Beispiel 1 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$adj(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

$\det(A) = -2$. A ist nicht invertierbar über $\mathbb{Z}$. A ist aber invertierbar als Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$ und $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 2 $R = \mathbb{R}[x]$

$A = \begin{pmatrix} x^2+x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x^2-1 & x+2 \\ x^2-2x+3 & x \end{pmatrix}$

$\det(A) = x+1$ $\det B = -6$
A nicht invertierbar B invertierbar

Lemma 2 Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinanten.

Beweis $B = P^{-1}\ A\ P$ für $A, B \in M_{n\times n}(K)$

$\det B = \det(P^{-1}\ AP) = \det(P)^{-1}\det(P)\det(A) = \det(A)$ □

Definition 4 $\dim(V) = n; V$ ist ein K-Vektorraum.
$T : V \longrightarrow V$ ist ein linearer Operator. Definiere $\det(T) := \det([T]_{\mathcal{B}})$ für eine (jede) Basis $\mathcal{B}$ von V.

Cramer's Formel Betrachte GS: $AX = Y$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$

Also $adj(A)AX = adj(A)Y$.

Also $(\det A)X = adj(A)Y$

Also $(\det A)x_j = \sum_{i=1}^{n} (adj A)_{ji} y_i$

Also gilt für $1 \leq j \leq n$, dass $(\det A)x_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} y_i \ \det A[i \mid j]$.

Hier erkennen wir die Determinante der Matrix, die man erhält, wenn man die j-te Spalte von A durch Y ersetzt.
Wenn $\det(A) \neq 0$ bekommen wir

Cramer's Regel Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $\det(A) \neq 0$.
Sei $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$.
Dann ist die eindeutige Lösung $X = A^{-1}Y$ so beschrieben:

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A},$$

wobei B_j die $n \times n$-Matrix ist, die man erhält, wenn man die j-te Spalte von A durch Y ersetzt.

§ 9 Eigenwerte und Eigenvektoren (21. Mai 2012)

Definition 1

(a) Seien V ein K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann ist $c \in K$ ein *Eigenwert von T*, falls ein $\alpha \in V$ existiert mit $\alpha \neq 0$ und

$$T(\alpha) = c\alpha.$$

(b) Sei $\alpha \in V$ und $T(\alpha) = c\alpha$, dann heißt α *Eigenvektor* (zum Eigenwert c).

(c) $W_c := \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = c\alpha\}$ ist ein Unterraum, der *Eigenraum* (zum Eigenwert c).

Bemerkung $W_c = \ker(T - cI)$, d.h. $W_c = \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\} = \{\alpha \mid (T - cI)\alpha = 0\}$.
c ist also Eigenwert genau dann, wenn $(T - cI)$ singulär ist.

Satz 1 Sei V endlich dim., $T \in \mathcal{L}(V,V), c \in K$. Äquivalent sind:

(i) c ist Eigenwert von T.

(ii) $(T - cI)$ ist nicht invertierbar.

(iii) $\det(T - cI) = 0$. □

Bemerkung 2 $\det(T - xI)$ ist ein Polynom von Grad n (die Eigenwerte sind also genau dessen Nullstellen).

Beweis Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Sei $A \in Mat_{n\times n}(K)$, $A = [T]_\mathcal{B}$. Es ist $A - xI = [T - xI]_\mathcal{B}$.
Nun ist

$$B := xI - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \\ & & x - a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } b_{ii} = (x - a_{ii})$$

$$\det B = \sum_{\tau \in S_n} \underbrace{(sign\ \tau)\ b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}}_{\text{Falls } \neq 0.}$$

$\deg\ (b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}) = |\{i \in \{1,\dots,n\} : \tau(i) = i\}|$.

Also ist $\prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$ der einzige Term (Hauptterm von Grad n). Wir sehen also, dass $\deg \left(\sum_{\tau}(sign\ \tau)\ b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}\right) = n$ und außerdem, dass $\det(xI - A)$ ein normiertes Polynom ist. □

Definition 2 $c \in K$ ist ein Eigenwert von $A \in Mat_{n\times n}(K)$, falls $(cI - A)$ singulär ist. Also sind die Eigenwerte von A die Nullstellen von $\det(xI - A)$ wie oben.

Definition 3 $f(x) := \det(xI - A)$ ist das charakteristische Polynom von A.

Lemma 1 Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.

Beweis Für $B = P^{-1}AP$ gilt
$\det(xI - B) = \det(xI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P) = \det P^{-1}\det(xI - A)\det P = \det(xI - A)$. □

Definition 4 Sei V endlich dim; $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

$$\text{Char. Pol. } (T) := \text{ Char. Pol. } ([T]_{\mathcal{B}})$$

für irgendeine Basis $\mathcal{B}$ von V (und damit für jede Basis).

Bermerkung und Beispiele T kann also nicht mehr als $\dim(V)$ Eigenwerte in K haben.

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$
hat keine reelle Eigenwerte, weil $\det(xI - A) = x^2 + 1$ keine reellen Nullstellen hat.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$\text{Char. Pol. } (A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

Eigenwerte $c = 1,\ c = 2 \in \mathbb{R}$.

$c = 1$ $\quad \ker(A - I) := W_1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } = 2, \text{ also } \dim(\ker(A - I)) = 1.$$

Wir wollen eine Basis für W_1 finden. Löse

$$(A - I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = (1, 0, 2)$ ist eine Lösung und $\{\alpha_1\}$ ist eine Basis für W_1.

$c = 2$ $\quad \ker(A - 2I) := W_2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } = 2, \text{ also } \dim W_2 = 1.$$

Finde Lösung wie oben.
$\alpha_2 = (1, 1, 2)$ und $\{\alpha_2\}$ ist eine Basis für W_2.

Lemma 2 Seien $v_i \neq 0; v_i \in V$. v_i ist Eigenvektor zu Eigenwert c_i für $i = 1, \dots, k$. Falls $c_i \neq c_j$ für $i \neq j$ mit $i, j \in \{1, \dots, k\}$, dann ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ linear unabhängig.

Beweis Bemerke, dass $v \in V, v \neq 0 \Rightarrow v$ kann nicht Eigenvektor zu verschiedenen Eigenwerten sein.
Wir führen einen Beweis per Induktion: $k = 2$.
Ist $v_2 = cv$, so ist $v_2 \in W_{c_1}$, also ist v_2 ein Eigenvektor zur c_1 und $c_2 \neq c_1$. Widerspruch.
Indutkionsannahme gelte für $k - 1$.
Seien $v_1, \dots, v_k$ linear abhängig. OE haben wir also $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i$

$$T(v_k) = c_k v_k = c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i \text{ und } T(v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} T(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$$
$$\Rightarrow c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} (c_k - c_i) v_i = 0$$
$$\underset{IA}{\Rightarrow} c_k - c_i = 0 \Rightarrow c_k = c_i \text{ (mit } i = 1, \dots, k-1).$$

Widerspruch. □

Korollar Seien $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$. Nimm an, dass T n-verschiedene Eigenwerte $d_1, \dots, d_n$ in K hat. Dann hat V eine Basis $\mathcal{D}$, bestehend aus Eigenvektoren von T.

Definition 5 Seien $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$. T ist diagonalisierbar (über K), falls V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T hat.

Bemerkung Seien $d_1, \dots, d_n$ verschiedene Eigenwerte von T und $\mathcal{D}$ eine Basis wie im Korollar. Dann ist $[T]_{\mathcal{D}}$ diagonal.

Bemerkung am Ende der 11. Vorlesung
$\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $d_1, \dots, d_n$ sind verschiedene Eigenwerte, α_i ist Eigenvektor zum Eigenwert d_i. Setze $\mathcal{D} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Dann ist $\mathcal{D}$ eine Basis und

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

eine diagonale Matrix.

Korollar 1 Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $d_1, \dots, d_k$ verschiedene Eigenwerte. Für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ sei $\mathcal{B}_i \subseteq W_{d_i}$ ist linear unabhängig. Dann ist $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ auch linear unabhängig.

Beweis Sei $L := \{v_1, \dots, v_\ell\} \subseteq \mathcal{B}$. Betrachte eine lineare Kombination $\sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j$. Nun setze $L_i := L \cap \mathcal{B}_i$ und setze $\alpha_i := \sum_{v_j \in L_i} c_j v_j$ $(*)$
falls $L_i \neq \varnothing$ (und $\alpha_i := 0$ per Konvention, falls $L_i = \varnothing$). Dann ist $\alpha_i \in W_{d_i}$. Also ist $0 = \sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ nur möglich, wenn $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, k$. (Da sonst die $\alpha_i \neq 0$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten **und** gleichzeitig linear abhängig wären. Widerspruch zu Lemma 2 der 11. Vorlesung!) Nun sind die v_j in $(*)$ linear unabhängig. Also $c_j = 0$ für alle j wie behauptet. □

Lemma 1 Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $d_1, \dots, d_k$ die verschiedenen Eigenwerte von T. Es gilt: T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$.

Beweis "$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von Eigenvektoren. Setze $\mathcal{B}_j := \mathcal{B} \cap W_{d_j}$.
Also ist $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$.

Setze $\ell_j := |\mathcal{B}_j|$. Also ist $n = |\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} \ell_j$.

Behauptung
$\ell_j = \dim W_{d_j}$.
Es ist klar, dass $\ell_j \leq \dim W_{d_j}$. Ist $\ell_i < \dim W_{d_i}$, dann existiert ein $\beta \in W_{d_i}$ mit $\mathcal{B}'_i := \mathcal{B}_i \cup \{\beta\}$ linear unabhängig. Aber dann ist

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_i \cup \{\beta\} = \dot{\bigcup_{j \neq i}} \mathcal{B}_j \,\dot{\cup}\, \mathcal{B}'_i$$

linear unabhängig (Korollar 1) und $|\mathcal{B}'| = n + 1$. Widerspruch (unmöglich).

"$\Leftarrow$" Sei $\sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$ und $\mathcal{B}_j$ eine Basis für W_{d_j} für jedes $j = 1, \dots, k$.

Setze $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$. Dann ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig (Korollar 1)

und $|\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} |\mathcal{B}_j| = \sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$.
Also ist $\mathcal{B}$ eine Basis für V und besteht aus Eigenvektoren von T. Also ist T diagonalisierbar. □

Sei nun $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$ diagonalisierbar, $d_1, \dots, d_k$ die verschiedenen Eigenwerte und $\mathcal{D}$ eine Basis bestehend aus Eigenvektoren (und geordnet, so dass die ersten Basisvektoren Eigenvektoren zu d_1 sind, d_2 usw.). Dann ist

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & d_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & d_k & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & d_k \end{pmatrix}$$

wobei für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ erscheint d_i ℓ_i-mal mit

$$\ell_i := \dim W_{d_i}$$

und damit ist Char. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{\ell_i}$ $\qquad (*)$

Umgekehrt, ist Char. Pol. (T) wie in $(*)$ (mit $d_i \neq d_j$ für $i \neq j$ und $\ell_i = \dim W_{d_i}$), dann ist T diagonalisierbar, weil $\sum_{i=1}^{k} \dim W_{d_i} = n$ ist (siehe Lemma 1).

Wir haben bewiesen:

Satz 1 Sei V endl. dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt: T ist diagonalisierbar genau dann, wenn Char. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{\ell_i}$, wobei die Vielfachheit ℓ_i der Nullstelle d_i $\dim W_{d_i}$ ist.

Behauptung $\dim W_d$ wird auch "geometrische Vielfachheit" der Nullstelle d genannt.

Im Allgemeinen gilt:

Satz 2 Sei $\dim(V)$ endlich, $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Sei d ein Eigenwert von T mit Vielfachheit μ. Es gilt: $\ell := \dim(W_d) \leq \mu$.

Beweis Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ eine Basis von W_d.
Ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \alpha_{\ell+1}, \dots \alpha_n\}$ von V.
Es ist

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d & & 0 & & & \\ & \ddots & & & B & \\ 0 & & d & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & 0 & & & C & \end{array}\right)$$

Wir berechnen Char. Pol. (A).

$$\det(xI - A) = \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} x-d & & 0 & & & \\ & \ddots & & & -B & \\ 0 & & x-d & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & 0 & & & xI - C & \end{array} \right) = (x-d)^{\ell} \det(xI - C)$$

Also ist $\ell \leq \mu$. □

T in den Beispielen 1 und 2 der 11. Vorlesung sind beide **nicht** diagonalisierbar.

Beispiel 3 $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$

Char. Pol. $(A) = (x-1)(x-2)^2$ (wie in Beispiel 2 !).

$d_1 = 1$

$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

Rang $(A - I) \neq 3$, weil $A - I$ singulär ist. Es ist klar, dass Rang $(A - I) \geq 2$. Also Rang $(A - I) = 2$.

$d_2 = 2$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$

Rang $(A - 2I) = 1$.

Also ist $\dim W_{d_1} = 1$ und $\dim W_{d_2} = 2$ und $\dim W_{d_1} + \dim W_{d_2} = 3$. Also ist T diagonalisierbar: Es existiert eine Basis $\mathcal{D}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

§ 10 Annihilator Ideal (1. Juni 2012)

Sei V ein K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $p \in K[x]$.

Proposition 1 Sei $\dim V = n$. Es gelten:

(1) $\mathcal{A}(T) := \{p \in K[x] \mid p(T) = 0\}$ ist ein Ideal.

(2) $\mathcal{A}(T) \neq \{0\}$.

Beweis

(1) $(p+q)(T) = p(T) + q(T)$
$(pq)(T) = p(T)q(T)$

(2) Betrachte die Elemente $I, T, T^2, \ldots, T^{n^2} \in \mathcal{L}(V,V)$.
Da $\dim \mathcal{L}(V,V) = n^2$, sind diese Elemente notwendig linear abhängig. Also existiert $c_0, \ldots, c_{n^2} \in K$ mit $c_0 I + c_1 T + \cdots + c_{n^2} T^{n^2} = 0$ und c_i nicht alle gleich Null. □

Definition 1 Der (eindeutig bestimmte) normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(T)$ ist das *minimale Polynom von T* (Min. Pol. (T)).

Bemerkung 1

(i) deg (Min. Pol. (T)) $\leq n^2$.
Wir werden aber eine bessere obere Schranke bekommen.

(ii) $p :=$ Min. Pol. (T) ist das normierte Polynom vom kleinsten Grad in $\mathcal{A}(T)$. Ist also charakterisiert durch:

(a) $p \in K[x]$

(b) $p(T) = 0$

(c) $\deg q < \deg p \Rightarrow q(T) \neq 0$

Definition 2 $A \in Mat_{n\times n}(K)$.
Min. Pol. (A) ist der normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(A)$ (analog definiert).

Bemerkung 2

(1) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für V. Für $f \in K[x]$ gilt

$$[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}}) \text{ (Übungsblatt).}$$

Also $f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$ für $A = [T]_{\mathcal{B}}$.

(2) Also haben ähnliche Matrizen das gleiche minimale Polynom.

Satz 1 Sei $\dim V$ endlich, $T \in \mathcal{L}(V,V)$ (oder $A \in Mat_{n\times n}(K)$). Es gilt: Char. Pol. (T) und Min. Pol. (T) haben dieselben Nullstellen (bis auf Vielfachheit).

Beweis Seien $p :=$ Min. Pol. (T) und $c \in K$. Zu zeigen: $p(c) = 0 \Leftrightarrow c$ ist Eigenwert von T.

"$\Rightarrow$" $p(c) = 0 \Rightarrow p = (x-c)q$; deg $q <$ deg p. So $q(T) \neq 0$.
Wähle $\beta \in V$ mit $\alpha := q(T)(\beta) \neq 0$.
Es gilt $0 = p(T)(\beta) = (T-cI)q(T)(\beta) = (T-cI)(\alpha)$. Also ist $\alpha \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert c.

"$\Leftarrow$" Umgekehrt sei $T(\alpha) = c\alpha; \alpha \neq 0, \alpha \in V, c \in K$.
Nun gilt $p(T)(\alpha) = p(c)\alpha$ (Übungsblatt).
Da aber $p(T) = 0$ und $\alpha \neq 0$, folgt daraus $p(c) = 0$. □

Proposition 1 Sei T diagonalisierbar. Dann zerfällt Min. Pol. (T) in verschiedene lineare Faktoren. (Wir werden später primäre Zerlegung anwenden, um die Umkehrung dieser Aussage auch zu beweisen.)

Beweis Sei T diagonalisierbar, $c_1,\dots,c_k \in K$ die verschiedenen Eigenwerte, $p :=$ Min. Pol. (T).

Behauptung
$p = (x-c_1)\cdots(x-c_k)$. Dies gilt, weil $(T-c_1I)\cdots(T-c_kI)(\alpha) = 0$ für jeden Eigenvektor α (weil α Eigenvektor zum Eigenwert c_i ist, für ein geeignetes i). Da es eine Basis vom Eigenvektor gibt, ist $p(T) = 0$. □

Nun berechnen wir das minimale Polynom für die Beispiele (1), (2) und (3) aus der 11. Vorlesung.
Wir bezeichnen p als minimales Polynom.
(3) $p = (x-1)(x-2)$, weil T diagonalisierbar ist (Proposition 1 anwenden).
(2) T ist nicht diagonalisierbar. Also können wir Proposition 1 nicht anwenden, aber Satz 1 können wir anwenden.

Da Char. Pol. $(T) = (x-1)(x-2)^2$ ist, hat p die Nullstellen 1 und 2. Wir probieren Polynome der Form

$$(x-1)^k(x-2)^\ell \text{ mit } k \geq 1 \text{ und } \ell \geq 1$$

("prüfen", ob sie T annihilieren).

$(x-1)(x-2)$:

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Also ist deg $(p) \geq 3$. Nun probieren wir

$$(x-1)^2(x-2) \text{ oder } (x-1)(x-2)^2$$

$(A-I)(A-2I)^2 = 0$. Also ist hier Char. Pol. (T) = Min. Pol. (T). □

Der Satz von Cayley Hamilton wird uns helfen, weniger "prüfen" zu müssen.

Aussage Wiederholung aus der 13. Vorlesung :
Satz von Cayley Hamilton
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V), f :=$ Char. Pol. (T).
Es gilt $f(T) = 0$, das heißt das minimale Polynom von T teilt f.

Beweis Seien $\mathcal{K}$ die Algebra der Polynome in T und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine Basis für V.
$A := [T]_{\mathcal{B}}$, das heißt $T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j$ für alle $1 \leq i \leq n$.
Wir schreiben diese Gleichungen um, als

(1) $\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}T - A_{ji}I)\alpha_j = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.
Sei B die $n \times n$-Matrix mit dem Koeffizienten in der Algebra $\mathcal{K}$ definiert durch

$$B_{ij} := \delta_{ij}T - A_{ji}I.$$

Beobachtung: $\det B = f(T)$, weil $f(x) = \det(xI - A)$ und die Einträge der Matrix $(xI - A)_{ij} = \delta_{ij}x - A_{ji}$. Also $(xI - A)_{ij}(T) = \delta_{ij}T - A_{ji}I = B_{ij}$ und somit gilt

$$f(T) = [\det(xI - A)](T) = \det[(xI - A)(T)] = \det B.$$

Wir wollen zeigen $f(T) = 0$. Also zeigen wir $(\det B)(\alpha_k) = 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Nun gelten per Definition für B_{ij} und α_j:

(2) $\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\alpha_j) = 0$ für $1 \leq i \leq n$. Setze $\tilde{B} := adj B$.

Aus (2) folgt für alle k und i: $\tilde{B}_{ki}(\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j$.
Wir summieren über i und bekommen:
$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\right)}_{kj\text{-te Koeff. von } \tilde{B}B} (\alpha_j).$$

Nun ist $\tilde{B}B = (\det B)I$, also $\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij} = \delta_{ij}\det B$.

Also $0 = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}(\det B)(\alpha_j) = (\det B)(\alpha_k)$. □

Wichtige Bemerkung Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung (e.g. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$).
$A \in Mat_{n \times n}(F_0) \subseteq Mat_{n \times n}(F_1)$.
Wir bezeichnen mit

$$\text{Char. Pol.}_{F_0}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_0}(A)$$

beziehungsweise

$$\text{Char. Pol.}_{F_1}(A) \text{ und Min. Pol.}_{F_1}(A)$$

die charakteristischen bzw. minimalen Polynome von A jeweils als Element aus $Mat_{n \times n}(F_0)$ und $Mat_{n \times n}(F_1)$.

Wir wollen zeigen, dass

(1) Char. Pol.$_{F_o}(A)$ = Char. Pol.$_{F_1}(A)$ und

(2) Min. Pol.$_{F_0}(A)$ = Min. Pol.$_{F_1}(A)$.

Beweis (1) Ist einfach, weil $\det(B)$ nur von Koeffizienten der Matrix B abhängen.

(2) (i) Wir untersuchen zunächst die folgende Frage: Wie entscheiden wir, für den gegebenen Körper K und der natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$, ob es ein Polynom $p \in K[x]$ gibt mit deg $(p) = k$ und $p(A) = 0$?
Wir lösen ein Matrixgleichungssystem

$$A^k + x_{k-1}A^{k-1} + \dots + x_0 I = 0 \qquad (*)$$

$(*)$ ist also ein lineares Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen in der Variablen $x_0, \dots, x_{k-1}$. Jede Lösung $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$ gibt uns ein Polynom $p(x) := x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j$ mit $p(x) \in \mathcal{A}(A)$. Wenn wir $(*)$ (für die kleinste natürliche Zahl k, für die es eine Lösung gibt) gelöst haben, dann ist die Lösung $a_0, \dots, a_{k-1}$ eindeutig, weil sie uns die eindeutig definierten Koeffizienten $1, a_{k-1}, \dots, a_0$ von Min. Pol.$_k(A)$ liefert.

Wir folgern:
Sei k minimal, so dass $(*)$ eine Lösung in K hat, dann liefert diese Lösung das Min. Pol. (A).

(ii) Nun untersuchen wir Lösungen für LGS:
Sei $B \in Mat_{m\times n}(F_0)$, $F_0 \subseteq F_1$ Körpererweiterung, $Y \in F_0^{m\times 1}$. Betrachte

$$BX = Y \qquad \text{(S)}$$

Hat (S) eine Lösung in $F_1^{n\times 1}$, dann hat (S) auch eine Lösugn in $F_0^{n\times 1}$ (und umgekehrt natürlich!).
Dies gilt, weil die r.Z.S.F. $(B\,|Y)$ (bzgl. F_1) uns alles liefert bzgl. Existenz von Lösungen. Nun ist aber die r.Z.S.F. eindeutig! Also ist sie gleich bezüglich F_0.

Aus (i) und (ii) sehen wir, dass $(*)$ eine Lösung $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in F_1^k$ genau dann hat, wenn es eine Lösung in F_0^k hat. Die Eindeutigkeit des Min. Pol.$_{F_1}$ liefert außerdem, dass die Lösung in F_0^k auch $(a_0, \dots, a_{k-1})$ sein muss! □

§ 11 Trigonalisierbarkeit, invariante Unterräume (4. Juni 2014)

Definition 1 $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist trigonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ für V gibt, so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine *obere Dreiecksmatrix* (i.e. $a_{ij=0}$ für $i > j$) gibt.

Satz 2 V endlich dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt: T ist trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ Char. Pol. (T) zerfällt in Linearfaktoren über K (i.e. Char. Pol. $(T) = (x - c_1)^{n_1} \cdots (x - c_k)^{n_k}$ mit $c_i \in K$).

Beweis "$\Rightarrow$" Klar, weil $[T]_{\mathcal{B}} = A$ eine obere Dreiecksmatrix ist, also $\det(xI - A)$ ist das Produkt $\prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$.

"$\Leftarrow$" Wir werden per Induktion eine Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ aufbauen, in der $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Da T wenigstens einen Eigenwert hat, hat T auch einen Eigenvektor zum Eigenwert $c_1 \in K$. Sei $\alpha \neq 0$ solch ein Eigenvektor und ergänze zu einer Basis $\{\alpha, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ für V (geordnet, so dass α der erste Vektor davon ist).
Betrachte diesbezüglich die Matrixdarstellung von T:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \Gamma \in Mat_{(n-1)\times(n-1)}(K)$$

Sei $G \in \mathcal{L}(W,W)$, wobei $W := span\{\beta_2, \ldots, \beta_n\}$ definiert durch $Gw := \Gamma w$. Wir sehen also Char. Pol. $(T) = (x - c_i)$ Char. Pol. (G). Da Char. Pol. (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist, so ist es auch Char. Pol. (G). Die IA liefert eine Basis $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, in der G eine obere Dreiecksmatrix-Darstellung hat:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -- & -- & -- & -- \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{array}\right)$$

Setze $\alpha_1 := \alpha$ und setze $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ □

§ 12 Invariante Unterräme (8. Juni 2012)

Definition $W \subseteq V$ ist ein Unterraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann ist W *T-invariant*, falls $T(W) \subseteq W$.

Beispiele

(0) $\{0\}$ und V sind T-invariant für alle T.

(1) Sei D die Ableitung Operator auf $V = K[x]$ und W der Unterraum der Polynome von deg $\leq n$. Dann ist W D-invariant.

(2) Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $TU = UT$, setze

(a) $W := \text{Im }(U)$

(b) $N := \ker(U)$

Dann sind W und N T-invariant.

Beweis

(a) Sei $\alpha \in \text{Im }(U)$, $\alpha = U(\beta)$; $T(\alpha) = T(U(\beta)) = U(T(\beta)) \in \text{Im }(U)$

(b) $\alpha \in N; U(T(\alpha)) = T(U(\alpha)) = T(0) = 0 \Rightarrow T(\alpha) \in N$

(3) (Übungsaufgabe:)
$W \subseteq V$ ist T-invariant $\Rightarrow W$ $g(T)$-invariant für alle $g \in K[x]$

(4) Für $g \in K[x]$ gilt $g(T)T = Tg(T)$, $U := g(T)$, insbesondere für $U := cI - T$. Also ist $\ker(T - cI)$ T-invariant. Der Eigenraum zum Eigenwert c ist T-invariant.

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$

Wir behaupten, dass nur $\{0\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ T-invariant sind (für $T = T_A$). Sei $W \neq V, W \neq \{0\}$ T-invariant. Es gelte aber dann daraus, dass $\dim W = 1$. Sei $\alpha \neq 0, \alpha \in W; \{\alpha\}$ ist eine Basis und damit ein Eigenvektor. A hat aber keine reellen Eigenwerte.

Der Operator $T \restriction_W := T_W$
Sei W T-invariant. Dann ist $T_W \in \mathcal{L}(W,W)$.

Matrix-Darstellung von T_W
Sei V endl. dim. und $W \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum mit dim. $W = r$.
Sei $\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ eine Basis für W. Ergänze $\mathcal{B}'$ zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ für V.
Betrachte $A := [T]_{\mathcal{B}}$. Wir haben die Gleichungen

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_i.$$

W ist T-invariant $\Rightarrow T\alpha_j \in W$ für $j \leq r$. Also $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{r} A_{ij}\alpha_i$ für $j \leq r$, das heißt $A_{ij} = 0$ für $j \leq r$ und $i > r$. Also sieht A aus:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei B $r \times r, C$ $r \times (n-r)$ und D $(n-r) \times (n-r)$ sind. Es ist darüber hinaus klar, dass $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

Lemma 1 Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant. Also $T_W \in \mathcal{L}(W,W)$. Es gelten:

(i) Char. Pol. (T_W) teilt Char. Pol. (T).

(ii) Min. Pol. (T_W) teilt Min. Pol. (T).

Beweis

(i) Ist klar, weil

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_W]_{\mathcal{B}'} & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

und somit ist $\det(xI - A) = \det(xI - B)\det(xI - D)$, wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

(ii) Beachte, dass

$$A^k = \begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix}$$

wobei gilt: C_k ist $r \times (n-r)$. Also jedes Polynom das A annihiliert, annihiliert auch damit B. Also Min. Pol. (B) teilt Min. Pol. (A). □

Wir werden in der nächsten Vorlesung die Matrix D genauer untersuchen.

Erinnerung (Quotientenraum) und direkte Summen aus Lineare Algebra I:

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. $V/W = \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$ mit $c(\alpha + W) = c\alpha + W$ für $c \in K$ und $(c\alpha + W) + (\beta + W) = (c\alpha + \beta) + W$ für $\alpha, \beta \in V$.
Bezeichnung: $\alpha + W := \overline{\alpha}$.

(2) **Kanonischer Homomorphismus**
$\pi : V \twoheadrightarrow V/W$
$\pi(\alpha) := \alpha + W$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W$.

(3) **Isomorphiesatz**
Sei $\varphi : V \to U$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen. Es gilt: $V/\ker\varphi \simeq \mathrm{Im}\ \varphi$.

(4) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Man schreibt $V = W_1 \oplus W_2$ (direkte Summe), falls $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Das heißt für alle $\alpha \in V$ existiert genau ein $(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$, so dass $\alpha = w_1 + w_2$.

(4) (Fortsetzung)
Projektion Homomorphismus
$\pi : W_1 \oplus W_2 \twoheadrightarrow W_2; \pi(w_1 + w_2) := w_2$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W_1$. Also gilt

$$\frac{W_1 \oplus W_2}{W_1} \simeq W_2.$$

(5) Die Abbildung

$$\overline{T} : V/W \to V/W$$

(für $W \subseteq V$ T-invariant, wobei $T \in \mathcal{L}(V, V)$) wird so definiert:

$$\overline{T}(\overline{\alpha}) = \overline{T}(\alpha + W) := T(\alpha) + W = \overline{T(\alpha)}.$$

Sie ist wohldefiniert, i.e. $\alpha_1 + W = \alpha_2 + W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$, weil $\alpha_1 - \alpha_2 \in W \Rightarrow T(\alpha_1 - \alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$. Sie ist auch linear (Übungsaufgabe). Also $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$.

Satz 1 Sei V endl. dim., $W \subseteq V, T \in \mathcal{L}(V, V)$ und W T-invariant. Sei $\mathcal{B}'$ eine Basis für W, ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \,\dot\cup\, \mathcal{B}''$ von V. Es gilt:

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$ und $D = [\overline{T}]_{\overline{\mathcal{B}''}}$. ($\overline{\mathcal{B}''} := \{\overline{\alpha}; \alpha \in \mathcal{B}''\}$)

Wir brauchen ein Lemma:

Lemma Sei V endl. dim.

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum; $\mathcal{B}' \subseteq W$ eine Basis für W, $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ eine ergänzende Basis für V. Dann ist $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für V/W.

(2) Umgekehrt sei $\{\overline{\alpha}_{r+1}, \dots \overline{\alpha}_n\}$ eine Basis für V/W, dann ist $\mathcal{B}' \cup \{\alpha_{r+1}, \dots \alpha_n\}$ eine Basis für V. (Übungsaufgabe, Übungsblatt) □

Beweis vom Satz Setze $r := \dim W$; B ist $r \times r$. Also ist $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$.
Die Aussage über B ist bereits in der 15. Vorlesung bewiesen worden.
Wir analysieren die $(n - r) \times (n - r)$-Matrix D. Die Matrix $A = [T]_{\mathcal{B}}$ ist durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j \text{ für } 1 \le i \le n \qquad (*)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} B \\ r \times r \\ --- \\ \\ \end{matrix} & [T(\alpha_{r+1})]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \end{array} \right)$$

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_r}_{|\ \mathcal{B}'\ | = r}, \underbrace{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n}_{|\ \mathcal{B}''\ | = (n-r)}\}$$

Beweis (Forsetzung)

$\overline{\mathcal{B}''} = \{\underbrace{\overline{\alpha_{r+1}}, \dots, \overline{\alpha_n}}_{|\ \mathcal{B}''\ |=n-r}\}$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B & A_{1r+1} & & A_{1n} \\ & \vdots & & \vdots \\ --- & A_{r(r+1)} & & A_{rn} \\ & A_{(r+1)(r+1)} & \cdots & A_{(r+1)n} \\ & \vdots & & \vdots \\ & A_{n(r+1)} & & A_{nn} \end{array}\right)$$

oder für $1 \le i \le n$

$$T(\alpha_i) = \underbrace{\sum_{j=1}^{r} A_{ji}\alpha_j}_{\in W} + \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\alpha_j \qquad (**)$$

und damit ist:

$\overline{T(\alpha_i)} = \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\overline{\alpha_j} = \overline{T}(\overline{\alpha_i})$ für $r+1 \le i \le n$ □

Korollar 1 Char. Pol. T = (Char. Pol. T_W)(Char. Pol. $\overline{T}$). (Für Min. Pol. T siehe Übungsblatt 8, Aufgabe 8.2.)

Korollar 2 T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Char. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Bemerkung Wir haben schon diese Tatsache bewiesen. Hier geben wir kurz einen zweiten Beweis (mit T_W und $\overline{T}$).

Beweis "$\Rightarrow$" wie im 1. Beweis

"$\Leftarrow$" **Per Induktion** (nach $\dim V$)
(wir wollen eine Basis $\mathcal{B}$ für V, so dass die Matrixdarstellung von T ein Dreieck ist.)
Anfang: $n = 1$ ist trivial. I. Annahme: gilt für $n-1$.
Sei c_1 ein Eigenwert von T und $\alpha_1 \neq 0$ ein Eigenvektor dazu.
Setze $W := \{c\alpha_1; c \in K\}$. Es ist klar, dass W T-invariant ist.
Betrachte V/W und $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$. Nun ist $\dim V/W = (n-1)$.
Wir haben
Char. Pol. T = (Char. Pol. T_W)(Char. Pol. $\overline{T}$) (†)
$T_W \in \mathcal{L}(W, W)$ und $T_W(\alpha) = c_1\alpha$ für alle $\alpha \in W$ (weil $T(\alpha) = T(c\alpha_1) = cT(\alpha_1) = cc_1\alpha_1 = c_1c\alpha_1$ mit $\alpha = c\alpha_1$).
Also ist $A_W := [T_W]_{\{\alpha_1\}} = [c_1]$ und $\det(xI - A_W) = \det(x.1 - c_1) = (x - c_1)$.
Also bekommen wir mit (†) Char. Pol. $T = (x - c_1)$ Char. Pol. $\overline{T}$. Wir sehen also, dass auch Char. Pol. $\overline{T}$ im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt. Die I. Annahme liefert nun eine Basis $\overline{\beta_2}, \dots, \overline{\beta_n}$ von V/W, wofür die Matrixdarstellung von $\overline{T}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
Setze $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ □

Nun betrachten wir diese Aussage für Min. Pol. (T).

Korollar 3 Sei V endl. dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$. T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Min. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Beweis Wir zeigen: Char. Pol. (T) zerfällt im Produkt von linearen Faktoren über K genau dann, wenn Min. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

"$\Rightarrow$" Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T). Da lineare Faktoren irreduzibel sind, folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorisierung in $K[x]$, dass auch Min. Pol (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist.

"$\Leftarrow$" Sei Min. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k}(x - c_i)^{\nu_i}$.

Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T) und beide Polynome haben dieselben Nullstellen in K (und in jeder Körpererweiterung).

Also Char. Pol. (T) = Min. Pol. (T) $q(x)$ mit $q(x) \in K[x]$; nun ist $q(x)$ reduzibel in einer alg. abg. Körpererweiterung $C \supseteq K$ und zerfällt im Produkt

$$q(x) = \prod_{j=1}^{\ell}(x - d_j) \text{ über } C.$$

Wir behaupten, dass d_j bereits in K liegt und $d_j = c_i$ fur geeignetes i. Dies gilt, weil d_j sonst eine Nullstelle von Min. Pol. (T) mit $d_j \in C \setminus K$ wäre (i.e. $d_j \in C$ aber $d_j \notin K$).

Dies ist aber unmöglich, da Min. Pol. (T) bereits alle seine Nullstellen in K hat. $\square$

§ 13 Direkte Summen (18. Juni 2012)

Lemma Sei V ein K-Vektorraum, $W_1, \dots, W_k$ Unterräume. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $W_1, \dots, W_k$ sind unabhängig, das heißt $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ (mit $\alpha_i \in W_i$ für $1 \le i \le k$) $\Rightarrow \alpha_i = 0$ für alle i.

(ii) $W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1}) = \{0\}$ für $2 \le j \le k$

(iii) Ist $\mathcal{B}_i$ eine Basis für W_i, so ist $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ eine Basis für V.

(Übungsaufgabe, Übungsblatt)

Notation Wir schreiben $V = W_1 + \dots + W_k$, wenn V nur die Summe der W_i's ist und wir schreiben $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, falls $V = W_1 + \dots + W_k$ und eine der äquivalenten Bedingungen (i), (ii) und (iii) gilt. In dem Fall heißt V die *direkte Summe* der W_i's.

Satz **(Primzerlegung von V bzgl. T)**
Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V, V)$ Min. Pol. $(T) = p = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ die Primfaktorisierung in $K[x]$ von p (wobei p_i verschiedene normierte irreduzible Polynome in $K[x]$ und $r_i \in \mathbb{N}$ sind). Setze $W_i := \ker p_i(T)^{r_i}$ für $1 \le i \le k$. Es gilt: W_i ist T-invariant für alle i (siehe 15. Vorlesung) und

(i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$

(ii) Min. Pol. $(T \restriction_{W_i}) = p_i^{r_i}$ für $1 \le i \le k$.

Wir beweisen den Fall $k = 2$
(Der allgemeinere Fall folgt per Induktion nach k.)

Proposition Sei $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V, V)$, Min. Pol. $(T) = m = m_1 m_2$ mit $ggT(m_1, m_2) = 1$. Setze $V_i := \ker m_i(T)$ für $i = 1, 2$. Es gilt $V = V_1 \oplus V_2$ und Min. Pol. $(T \restriction_{V_i}) = m_i$ für $i = 1, 2$.

Beweis Da m_1, m_2 relativprim sind, existiert $q_1, q_2 \in K[x]$ mit $1 = m_1 q_1 + m_2 q_2$. Also
$I = m_1(T) q_1(T) + m_2(T) q_2(T)$ $(*)$

Behauptung $V_1 = \text{Im } m_2(T)$ und $V_2 = \text{Im } m_1(T)$

Beweis $0 = m(T) = m_1(T) m_2(T)$, wobei $m =$ Min. Pol. (T). Also $\text{Im } m_2(T) \subseteq \ker m_1(T)$.

Umgekehrt sei $v \in \ker m_1(T)$. Mit $(*)$ gilt

$$v = \underbrace{q_1(T) m_1(T)(v)}_{=0} + \underbrace{m_2(T) q_2(T)(v)}_{\in \text{Im } m_2(T)} \qquad \square$$

Wir zeigen: $V = V_1 \oplus V_2$

1. Summe: $v \in V$. Mit $(*)$ gilt:
   $v = \underbrace{m_1(T)q_1(T)v}_{\in \mathrm{Im}\ m_1(T)} + \underbrace{m_2(T)q_2(T)v}_{\in \mathrm{Im}\ m_2(T)}$
2. Direkt: Sei $v \in V_1 \cap V_2$. Mit $(*)$ gilt:
   $v = \underbrace{q_1(T)m_1(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_1} + \underbrace{q_2(T)m_2(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_2}$

Sei nun $\widetilde{m}_i$ = Min. Pol. $(T \restriction_{V_i})$ für $i = 1,2$. Da $V_i = \ker m_i(T)$, ist es klar, dass $m_i(T \restriction_{V_i}) = 0$ für $i = 1,2$.

Also $\quad \widetilde{m}_1 \mid m_1 \qquad (**)$
und $\quad \widetilde{m}_2 \mid m_2$.

Behauptung $\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2$ annihiliert T.

Beweis Berechne für $v_2 \in V_2$ und $v_1 \in V_1$

$\widetilde{m}_1(T)\widetilde{m}_2(T)(v_2 + v_1) = \widetilde{m}_1(T)[\widetilde{m}_2(T)(v_2) + \widetilde{m}_2(T)(v_1)]$
$= \widetilde{m}_1(T)(0 + \widetilde{m}_2(T)(v_1)) = 0$ mit $\widetilde{m}_2(T)(v_1) \in V_1$, weil V_1 $\widetilde{m}_2(T)$-invariant ist (siehe 15. Vorlesung).

Da $\widetilde{m}_2\widetilde{m}_1$ annihiliert T folgt
$m_1 m_2 = m \mid \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 \qquad (***)$

Da m_1, m_2 relativprim sind, folgt nun aus $(**)$ und $(***)$, dass $\widetilde{m}_i = m_i$ für $i = 1,2$. □

Sonderfall p_i ist linear und $p = (x - c_1)\cdots(x - c_k)$ mit $c_i \neq c_j$ für $1 \leq i \neq j \leq k$.

Hier ist $W_i = \ker(T - c_i I)$ = Eigenraum zum Eigenwert c_i.

Der Primzerlegungssatz besagt: $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Also hat V eine Basis aus Eigenvektoren und damit ist T diagonalisierbar. Wir haben damit die Umkehrung (von Proposition 1 aus der 13. Vorlesung) gezeigt.

Wir haben also bewiesen:

Satz (Diag. Kriterium für Min. Pol.)
T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Min. Pol. (T) erfällt in verschiedene lineare Faktoren über $K[x]$.

§ 14 Jordanketten (18. Juni 2012)

Definition Sei $T : V \to V$ linear, c Eigenwert, $v_1 \neq 0$, $v_2, \dots, v_r \in V$. $(v_1, \dots, v_r)$ heißt *Jordankette*, wenn $(T - cI)(v_1) = 0$ (v_1 Eigenvektor zum c) und $(T - cI)(v_i) = v_{i-1}$ für $i = 2, \dots r$.

Lemma Sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine Jordankette. Es gelten für $W = span\{v_1, \dots, v_r\}$:

(i) $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_r\}$ ist eine Basis für W

(ii) W ist T-invariant und

(iii) $[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & c \end{pmatrix} \leftarrow$ Jordanzelle

(Übungsaufgabe, Übungsblatt)

(1) V ist ein K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V), c \in K$ ein Eigenwert, $\ell \in \mathbb{N}, v_i \in V$. $(v_1, \dots, v_\ell)$ ist eine Jordankette der Länge ℓ zum Eigenwert c, falls

$$\begin{array}{rcll} (T - cI)v_i & = & v_{i-1} & i = 2, \dots, \ell \\ (T - cI)v_1 & = & 0 & \text{und } v_1 \neq 0 \end{array}$$

(2) $(v_1, \dots, v_\ell)$ ist eine Jordankette $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_\ell\}$ ($:= \mathcal{B}'$) linear unabhängig. $W = span\{v_1, \dots, v_\ell\}$ ist T-invariant und

$$[T \restriction_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & c \end{pmatrix} \leftarrow J_\ell(c) := \text{ Jordanzelle der Dimension } \ell \text{ zum Eigenwert } c$$

(Übungsblatt Nr. 9)

(3) Seien $W \subseteq V, W' \subseteq V$ Unterräume; W' ist Komplement von W in V, falls $V = W \oplus W'$.

Bemerkung

(i) Komplemente existieren und sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

(ii) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $v_1^1, \dots, v_s^1 \in V$ linear unabhängig, so dass $span\{v_1^1, \dots, v_s^1\} \cap W = \{0\}$ sind. Dann kann man $\{v_1^1, \dots, v_s^1\}$ zu einer Basis vom Komplement von W in V ergänzen.

Satz **Jordan Normal Form**
Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V, V)$. Sei Min. Pol. $(T) = (x - c)^r$ mit $c \in K$. Dann hat V eine Basis aus Jordanketten zum Eigenwert c. Die längsten Ketten haben die Länge r, die Anzahl der Ketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis **Behauptung**
Seien $v^1,\dots,v^s \in \ker(T-cI)^j$ linear unabhängig und
$span\{v^1,\dots,v^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-1} = \{0\}$, dann sind
$w^1 := (T-cI)v^1,\dots,w^s = (T-cI)v^s \in \ker(T-cI)^{j-1}$ linear unabhängig und
$span\{w^1,\dots,w^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-2} = \{0\}$.

Beweis der Behauptung
$0 = (T-cI)^j v^i = (T-cI)^{j-1}\underbrace{(T-cI)v^i}_{w^i}$. Also $w^i \in \ker(T-cI)^{j-1}$.

Sei nun $\sum_{i=1}^{s} c_i w^i = 0$, so $\sum_{i=1}^{s} c_i (T-cI)v^i = 0$.

So $(T-cI)\sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$. Also $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \ker(T-cI)^{j-1}$, weil $(T-cI)^{j-1}(\sum c_i v^i) =$
$(T-cI)^{j-2}\underbrace{(T-cI)(\sum c_i v^i)}_{0} = 0$.

Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in span\{v^1,\dots,v^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-1}$.

Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v_i = 0$ mit $c_i \neq 0$ für ein i. Widerspruch, da $\{v_1,\dots,v_s\}$ linear unabhängig sind.

Betrachte nun $\sum c_i w^i$, so dass $(T-cI)^{j-2}(\sum c_i w^i) = 0$.
Dann ist $(T-cI)^{j-1}(\sum c_i v^i) = 0$, so $\sum c_i v^i = 0$ so $(T-cI)(\sum c_i v^i) = 0$.
Also $\sum c_i (T-cI)v^i = 0 = \sum c_i w^i$. □

Wir bauen nun die Jordanketten folgendermaßen:
(Beachte, dass $\ker(T-cI) \subseteq \dots \subseteq \ker(T-cI)^r = V$.)
Setze $n_r = \dim\ker(T-cI)^r - \dim\ker(T-cI)^{r-1}$ und $V = V_r \quad \oplus \ker(T-cI)^{r-1}$.
Sei $\{v_r^1,\dots,v_r^{n_r}\}$ eine Basis für V_r.
Betrachte nun $\ker(T-cI)^{r-1} = V_{r-1} \quad \oplus \ker(T-cI)^{r-2}$.
Setze $v_{r-1}^1 := (T-cI)v_r^1,\dots,v_{r-1}^{n_r} := (T-cI)v_r^{n_r} \in \ker(T-cI)^{r-1}$ und ergänze zu einer Basis von Komplement von $\ker(T-cI)^{r-2}$ in $\ker(T-cI)^{r-1}$:
$\{v_{r-1}^1,\dots,v_{r-1}^{n_r}, v_{r-1}^{n_r+1},\dots,v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}\}$.
Also $n_{r-1} = \dim\ker(T-cI)^{r-1} - \dim\ker(T-cI)^{r-2} - n_r$.
Wir verfahren so weiter. Im letzten Schritt bekommen wir
$v_1^1 = (T-cI)v_2^1,\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2} = (T-cI)v_2^{n_r+\dots+n_2}$, welches wir zu einer Basis von $\ker(T-cI)$ ergänzen:
$v_1^1,\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2}, v_1^{n_r+\dots+n_2+1},\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}$.

Dies ist die Gestalt der Gesamtbasis für V, die wir erhalten:

$$
\begin{array}{cccc}
v_r^1,\dots,v_r^{n_r} & & & \\
v_{r-1}^1,\dots,v_{r-1}^{n_r}, & v_{r-1}^{n_r+1},\dots,v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\underbrace{v_1^1,\dots,v_1^{n_r}}_{n_r}, & \underbrace{v_1^{n_r+1},\dots,v_1^{n_r+n_{r-1}}}_{n_{r-1}}, & \dots, & \underbrace{v_1^{n_r+\dots+n_2+1},\dots,v_1^{n_r+\dots+n_1+1}}_{n_1} \\
\text{Jordanketten} & \text{Jordanketten} & & \text{Jordanketten} \\
\text{der Länge } r & \text{der Länge } r-1 & ,\dots, & \text{der Länge } 1
\end{array}
$$

Bemerkung Die Matrixdarstellung in der Basis der Jordanketten ist

$$A_c := \begin{pmatrix} J_r(c) & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & J_r(c) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & J_1(c) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_1(c) \end{pmatrix} \text{ wobei } J_i(c)\ n_i\text{-mal erscheint.}$$

Korollar Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V,V)$. Falls Min. Pol. (T) (oder Char. Pol. (T)) zerfällt über K, dann hat V eine Basis von Jordanketten zu den verschiedenen Eigenwerten. Die Anzahl der Jordanketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis Min. Pol. $(T) = (x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}$
$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ mit W_i T-invariant und Min. Pol. $T \restriction_{W_i} = (x-c_i)^{r_i}$ (Primzerlegungssatz).
Jordan Normal Form liefert Basen $\mathcal{B}_{c_i}$ von Jordanketten für $T \restriction_{W_i}$ und jeden c_i.
Setze $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geordnete Basis). □

Bemerkung Sei $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k, W_i$ T-invariant. $\mathcal{B}_i$ = Basis für $W_i, \mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geordnete Basis). Es gilt

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_i = [T \restriction_{W_i}]_{\mathcal{B}_i}$.

(Übungsaufgabe, Übungsblatt Nr. 9)

Korollar Sei K alg. abg., V ein K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$.
Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{c_k} \end{pmatrix}$$

wobei $c_1, \ldots c_k$ die Eigenwerte von T sind und A_{c_i} wie vorher beschrieben.
Sei $K = \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, V ein K-Vektorraum mit $(x \mid y) \in K$.

Erinnerung **Definition**
Ein inneres Produkt auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto (x \mid y), \end{aligned}$$

so dass

(1) $(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}$

(2) $(c_1, x_1 + c_2 x_2 \mid y) = c_1(x_1 \mid y) + c_2(x_2 \mid y)$

(3) $(x \mid x) \geq 0$ und $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bemerkung $(x \mid x) = \overline{(x \mid x)}$, also ist $(x \mid x) \in \mathbb{R}$.

Notation $(x \mid x) := \|x\|^2$ und $\|x\| := \sqrt{(x \mid x)}$ (Norm von x)

Bemerkung Es gilt

(i) $\|cx\| = |c|\ \|x\|$

(ii) (2′) $(x \mid c_1 y_1 + c_2 y_2) = \overline{(c_1 y_1 + c_2 y_2 \mid x)} = \overline{c_1 (y_1 \mid x) + c_2 (y_2 \mid x)} = \overline{c_1}\,\overline{(y_1 \mid x)} + \overline{c_2}\,\overline{(y_2 \mid x)} = \overline{c_1}(x \mid y_1) + \overline{c_2}(x \mid y_2)$

Terminologie Wenn $K = \mathbb{R}$, heißt V *Euklischer Raum* und das innere Produkt $(|)$ heißt *symmetrisch bilineare positiv definite Form.*

Wenn $K = \mathbb{C}$, heißt V *hermitescher Raum, unitärer Raum* und das innere Produkt $(|)$ ist *hermitesch symmetrisch* (1), *konjugiert bilinear* (2) und (2’) *positive definite Form* (3).

Beispiel auf $V = K^n$. Das Standard-Innere-Produkt $x = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$
$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \overline{\eta_i}$

Definition

(i) x, y sind *orthogonal*, falls $(x \mid y) = 0$ (äquivalent $(y \mid x) = 0$).

(ii) $W_1, W_2 \subseteq V$ sind *orthogonal*, falls $(x \mid y) = 0$ für alle $x \in W_1$ und für alle $y \in W_2$

(iii) $S \subseteq V$ ist *orthonormal*, falls $(x \mid y) = 0$, wenn $x \neq y$ und $(x \mid y) = 1$, wenn $x = y$. Also $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist orthonormal, falls $(x_i \mid y_i) = \delta_{ij}$

(iv) S ist *vollständig orthonormal*, falls S orthonormal und maximal (bezüglich Inklusion) für die Eigenschaft “orthonormal” ist.

Bemerkung

(i) S ist orthonormal $\Rightarrow S$ ist linear unabhängig.

Beweis
$\sum c_i x_i = 0 \Rightarrow 0 = (\sum c_i x_i \mid x_j) = \sum c_i (x_i \mid x_j) = c_j$

(ii) $\dim V = n \Rightarrow |S| \leq n$ für S orthonormal.

In diesem Fall

Definition orthogonal $\dim(V) = max\{|S| \mid S \text{ orthonormal}\}$

Bemerkung orthogonal $\dim(V) \leq \dim(V)$

Notation $S^\perp := \{x \in V \mid (x|s) = 0 \text{ für alle } s \in S\}$

Bemerkung

(i) $S^\perp$ ist ein Unterraum.

Beweis
$0 = (0 \mid y) \Rightarrow \{0\} \subseteq S^\perp$.
Für $x_1, x_2 \in S^\perp; c \in K : (x_1 + cx_2 \mid s) = (x_1 \mid s) + c(x_2 \mid s) = 0 + 0 = 0$

(ii) $S \subseteq (S^\perp)^\perp := S^{\perp\perp}$

(iii) $span(S) \subseteq S^{\perp\perp}$

Definition $W \subseteq V$ ist ein Unterraum. $W^\perp$ ist das *orthogonale Komplement.*

Satz 1 (Bessel's Ungleichung)
Sei $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ orthogonal, $x \in V$. Setze $c_i := (x \mid x_i)$. Es gelten

(i) $\sum_i |c_i|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) $x' := x - \sum c_i x_i$ ist orthogonal zu x_j für alle $(j = 1, \ldots, n)$

Beweis $0 \leq (x' \mid x') = (x - \sum c_i x_i \mid x - \sum c_i x_i) =$
$(x \mid x) - \sum_i c_i (x_i \mid x) - \sum_i \overline{c_i} (x \mid x_i) + \sum_{i,j} c_i \overline{c_j} (x_i \mid x_j) =$
$\|x\|^2 - \sum_i c_i \overline{c_i} - \sum_i \overline{c_i} c_i + \sum_i c_i \overline{c_i} = \|x\|^2 - \sum_i |c_i|^2.$
Damit ist (i) bewiesen.

$(x' \mid x_j) = (x \mid x_j) - \sum_i c_i (x_i \mid x_j) = c_j - c_j = 0$. Damit ist (ii) bewiesen. □

Satz 2 (Charakterisierung von Vollständigkeit)
Sei $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ orthonormal. Folgende sind äquivalent:

(i) S ist vollständig.

(ii) Aus $(x \mid x_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ folgt $x = 0$.

(iii) $spanS = V$.

(iv) $x = \sum_i (x \mid x_i) x_i$ für alle $x \in V$.

(v) $(x \mid y) = \sum_i (x \mid x_i)(x_i \mid y)$ für alle $x, y \in V$.

(vi) $\|x\|^2 = \sum_i \mid (x \mid x_i) \mid^2$ für alle $x \in V$.

Beweis $(i) \Rightarrow (ii)$
$x \neq 0$. Setze $x_{n+1} := \frac{x}{\|x\|}$. Dann ist $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ orthonormal.
$\Big[(x_{n+1} \mid x_i) = 0$ und $(x_{n+1} \mid x_{n+1}) = \frac{1}{\|x\|^2}(x \mid x) = 1\Big]$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
Sei $x \in V, x \notin spanS$, dann ist $x^1 = x - \sum (x \mid x_i) x_i \neq 0$ und (Satz 1) ist zu jedem x_i orthogonal. Widerspruch.

$(iii) \Rightarrow (iv)$
sei $x \in V; x = \sum c_i x_i$, also $(x \mid x_j) = \sum c_i (x_i \mid x_j) = c_j$.

$(iv) \Rightarrow (v)$

$$\left(\sum_i (x \mid x_i) x_i \;\Big|\; \sum_j (y \mid x_j) x_j\right) = \sum_{i,j} (x \mid x_i)\overline{(y \mid x_j)}(x_i \mid x_j) = \sum_i (x \mid x_i)(x_i \mid y).$$

$(v) \Rightarrow (vi)$

$$(x \mid x) = \sum_i (x \mid x_i)(x_i \mid x) = \sum_i (x \mid x_i)\overline{(x \mid x_i)} = \sum_i \mid (x \mid x_i) \mid^2.$$

$(vi) \Rightarrow (i)$
sei $x \notin S$. Wenn $S \cup \{x\}$ orthonormal ist, dann ist
$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \mid (x \mid x_i) \mid^2 = 0 = (x \mid x) \neq 1$. Widerspruch. □

Satz 3 (Schwarz)
$|\ (x \mid y)\ | \leq \|x\|\ \|y\|$.

Beweis $y = 0$ ist klar.
Sei $y \neq 0; y_1 := \frac{y}{\|y\|}$ ist orthonormal und Bessel impliziert

$$|\ (x \mid y_1)\ |^2 \leq \|x\|^2.$$

Also $\frac{1}{\|y\|^2} |(x \mid y)|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow |\ (x \mid y)\ |^2 \leq \|x\|^2\ \|y\|^2$. □

Definition $\delta(x \mid y) := \|x - y\|$.

Proposition 1

(i) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

(ii) $\delta(x,y) \geq 0; \delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$ ($\triangle$ Ungleichung).

(iv) $\delta(x,y) = \delta(x+z, y+z)$

Beweis In der 20. Vorlesung. □

Ein inneres Produkt definiert also auch eine Norm:

Bemerkung und Definition $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, V$ ist ein K-Vektorraum
$V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
$x \longmapsto \|x\|$
ist eine *Norm*, falls

(i) $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

(ii) $\|cx\| = |c|\ \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ □

Beweis (iii) (Dreiechsungleichung für Norm und Distanz)
$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + (x \mid y) + (y \mid x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} + \|y\|^2 =$
$\|x\|^2 + 2Re(x \mid y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\ |\ (x \mid y)\ | + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2 =$
$(\|x\| + \|y\|)^2$ □

Satz 1 (Gram-Schmidt)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit einem inneren Produkt. Dann hat V eine Basis, bestehend aus einer orthonormalen (vollständigen) Menge.

Definition Sei S eine Basis, S orthonormal, dann heißt S eine orthonormale Basis.

Beweis Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis. Wir werden eine orthonormale Basis

$$\mathcal{J} = \{y_1, \dots, y_n\}$$

per Induktion bilden.

I. Anf: $x_1 \neq 0$. Setze $y_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$.

I.A: Seien $y_1, \dots, y_r$ schon definiert, so dass $\{y_1, \dots, y_r\}$ orthonormal und $y_j \in span\{x_1, \dots, x_j\}$ für $j = 1, \dots, r$.

I.S.: Betrachte

$$z := x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} c_i y_i \text{ für alle } c_i \in K \qquad (*)$$

Berechne $(z \mid y_j) = (x_{r+1} \mid y_j) - c_j$ für $j = 1, \dots, r$. Nun setze $c_j = (x_{r+1} \mid y_j)$. Mit dieser Wahl in $(*)$ ist $(z \mid y_j) = 0$ für alle $j = 1, \dots, r$ und

$$z \in span\{x_{r+1}, y_1, \dots, y_r\} \subseteq span\{x_{r+1}, x_1, \dots, x_r\},$$

$z \neq 0$, da $x_1, \dots, x_{r+1}$ linear unabhängig sind und der Koeffizient in $(*)$ von x_{r+1} ist nicht Null. Nun setze $y_{r+1} := \frac{z}{\|z\|}$. □

Satz 2 Sei W ein Unterraum. Es gilt

(1) $V = W \oplus W^\perp$

(2) $W^{\perp\perp} = W$.

Beweis Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine orthonormale Basis für W und $z \in V$. Schreibe

$$W \ni x := \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \text{ wobei } c_i = (z \mid x_i).$$

Bessel liefert: $y := z - x$ ist orthogonal zu x_i und damit zu W, das heißt $y \in W^\perp$.
Also $z = x + y$, $x \in W, y \in W^\perp$.
Es gilt ferner, dass $W \cap W^\perp = \{0\}$ (weil $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

(2) $z = x + y$. Also $(z \mid x) = \|x\|^2 + (y \mid x) = \|x\|^2$. Analog $(z \mid y) = \|y\|^2$.
Wenn $z \in W^{\perp\perp}$, dann $(z \mid y) = 0 = \|y\|^2$. So $z = x \in W$. □

§ 15 Lineare Funktionale (29. Juni 2012)

Satz 3 (Riesz-Darstellung)
Sei V ein endlich dim. inneres Produkt K-Vektorraum.
Sei $f \in V^*$. Es existiert genau ein $y \in V$ mit $f(x) = (x \mid y)$ für alle $x \in V$ $\quad (\dagger)$.

Beweis Existenz: $f = 0 \Rightarrow y = 0$.
Sei $f \neq 0; W := \ker(f) \subsetneq V; W^\perp \neq \{0\}$.

Sei $y_0 \neq 0; y_0 \in W^\perp; OE\|y_0\| = 1$.

Setze $y := \overline{f(y_0)}y_0$. Beobachte $(y_0 \mid y) = (y_0 \mid \overline{f(y_0)}y_0) = f(y_0)(y_0 \mid y_0) = f(y_0)$.

Somit ist $(\dagger)$ erfüllt für y_0.

Für $x = \lambda y_0$ berechnen wir allgemeiner: $f(x) = f(\lambda y_0) = \lambda f(y_0) = \lambda(y_0 \mid y) = (\lambda y_0 \mid y)$. Also ist $(\dagger)$ erfüllt.

Für $x \in W : (x \mid y) = (x \mid \overline{f(y_0)}y_0) = f(y_0)(x \mid y_0) = 0 = f(x)$. Also ist $(\dagger)$ erfüllt.

Sei nun $x \in V$, schreibe $x = x_0 + \lambda y_0$ mit $\lambda := \frac{f(x)}{f(y_0)}$ und $x_0 := x - \lambda y_0$.

Berechne $f(x_0) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_0)}f(y_0) = 0$, so ist $x_0 \in W$
und $f(x) = f(x_0) + f(\lambda y_0) = (x_0 \mid y) + (\lambda y_0 \mid y) = (x_0 + \lambda y_0 \mid y) = (x \mid y)$. Also ist $(\dagger)$ immer erfüllt.

Eindeutigkeit:
Seien $y_1, y_2 \in V$ mit $(x \mid y_1) = (x \mid y_2)$ für alle $x \in V$. Dann $(x \mid y_1 - y_2) = 0$ für alle $x \in V$, insbesondere für $x := (y_1 - y_2)$ bekommen wir $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, so $y_1 - y_2 = 0$. $\square$

Satz 4 Die Abbildung
$\rho : V^* \longrightarrow V$
$f \longmapsto y$
(i.e. $\rho(f)$ ist eindeutig definiert durch $f(x) = (x \mid \rho(f))$ für alle $x \in V$ erfüllt

(*i*) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$

(*ii*) ρ ist surjektiv

(*iii*) ρ ist injektiv, aber Achtung

(*iv*) $\rho(cf) = \overline{c}\rho(f)$ für alle $c \in K$, i.e. ρ ist ein konjugierter Isomorphismus.

Beweis

(ii) $y \in V$. Betrachte $f(x) := (x \mid y)$. $f \in V^*$ und $\rho(f) = y$.

(iii) $f(x) = (x \mid 0) = 0$ für alle $x \Rightarrow f = 0$.

(iv) $z := \rho(cf); y := \rho(f)$. Zeige: $Z = \overline{c}y$, i.e. für alle $x \in V$: $(cf)(x) = (x \mid \overline{c}y)$.
Berechne: $(cf)(x) = cf(x) = c(x \mid y) = (x \mid \overline{c}y)$ $\square$

Folgerungen

I. $(f_1 \mid f_2) := (\rho(f_2) \mid \rho(f_1))$ definiert ein inneres Produkt auf V^*.

II. Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis für V, dann existiert $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ eine Basis für V mit $(x_i \mid y_i) = \delta_{ij}$ für alle i, j.

III. $W^0 \subseteq W^*$ wird ersetzt durch $W^\perp \subseteq V$, i.e. $\rho(W^0) = W^\perp$.

IV. Sei $T \in L(V, V)$. Definiere T^* durch $(Tx \mid y) := (x \mid T^*y)$ für alle $x \in V$ (d.h. $T^*(y) = z$, genau dann, wenn für alle $x \in V : (x \mid z) = (Tx \mid y)$).

Es gilt $T^* \in L(V, V)$. T^* ist die transponierte (adjungierte) Konjugierte.
Eigenschaft der tranponierten Konjugierten

(1) $(cT)^* = \overline{c}T^*$

(2) Sei $[T]_{\mathcal{X}} := A$ und $\mathcal{Y}$ die Basis wie in II.
Es gilt $[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} := A^*$ (i.e. der ij-te Koeffizient von A^* ist $\overline{a_{ji}}$, wobei a_{ij} der ij-te Koeefizient von A ist).

(3) $\det A^* = \overline{\det A}$

(4) Die Eigenwerte von A^* sind die Konjugierten der Eigenwerte von A.

Folgerungen I., II., III. und IV. werden im Übungsblatt Nr. 11 ausgearbeitet.

§ 16 Beziehung zum Bidual (2. Juli 2012)

Erinnerung **Proposition 1**: 24. Vorlesung am 27. Januar 2012
$y_0 \in V \longmapsto L_{y_0} \in V^{**}$; $L_{y_0}(f) := f(y_0)$ für alle $f \in V^*$

und

Satz 1: 24. Vorlesung am 27. Januar 2012

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & y_0 & \longmapsto & L_{y_0} \end{array}$$

ist ein (kanonischer) Isomorphismus.

Vergleiche mit

$$\begin{array}{rcccccccc} \delta: & V & \longrightarrow & V^* & \text{und} & \gamma: & V^* & \longrightarrow & V^{**} \\ & y_0 & \longmapsto & y_0^* & & & y_0^* & \longmapsto & y_0^{**} \end{array}$$

$y_0^*(x) := (x \mid y_0)$ für alle $x \in V$ und $y_0^{**}(y^*) = (y^* \mid y_0^*)$ für alle $y^* \in V^*$

Also

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & y_0 & \longmapsto & L_{y_0} \end{array}$$

mit $L_{y_0}(y^*) := y^*(y_0)$ für $y^* \in V^*$ $(*)$
einerseits und

$$V \xrightarrow{\delta} V^* \xrightarrow{\gamma} V^{**}, \quad \gamma \circ \delta : y_0 \longmapsto y_0^{**}$$

anderserseits.

Behauptung $L_{y_0} = y_0^{**}$.

Beweis Es genügt, zu zeigen, dass $y_0^{**}(*)$ erfüllt.
Wir berechnen $y_0^{**}(y^*) = (y^* \mid y_0^*) = (y_0 \mid y) = y^*(y_0)$ □

§ 17 Hermite'sche Operatoren

Definition

(*i*) $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist *Hermite'sch* (oder selbstadjungiert), falls $T = T^*$, i.e. $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ für alle $x, y \in V$.

(*ii*) $K = \mathbb{R}$; $T = T^*$; T heißt auch *reell symmetrisch*.

(*iii*) $K = \mathbb{C}; T = T^*$ heißt auch *komplex Hermite'sch*.

Matrizendarstellungen von Hermite'schen Operatoren

Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis. Also ist $\mathcal{J} = \mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ ist Selbstdual, siehe Übungsblatt Nr. 11). Also impliziert $T = T^*$, dass A *Hermite'sch* ist, wobei

$$A := [T]_{\mathcal{X}} = [T^*]_{\mathcal{Y}} = [T^*]_{\mathcal{X}} = \overline{A^t} := A^*.$$

Das heißt $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (A ist *komplex Hermite'sch*), und im reellen Fall $a_{ij} = a_{ji}$, i.e. $A = A^t$ (A ist *symmetrisch*).

Bemerkungen Übungsaufgabe: Weitere Eigenschaften von Hermite'schen Opteratoren.

(*i*) Umgekehrt sei A Hermite'sch und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis für V mit $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Definiere $T(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i) := A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$. Dann ist T Hermite'sch.

(*ii*) T_1, T_2 sind Hermite'sch $\Rightarrow T_1 + T_2$ ist Hermite'sch.

(*iii*) $T \neq 0$ ist Hermite'sch, $\alpha \in K, \alpha \neq 0$, dann ist αT Hermite'sch genau dann, wenn $\alpha \in \mathbb{R}$.

(*iv*) T ist invertierbar und Hermite'sch genau dann, wenn T^{-1} Hermite'sch ist.

Satz 1 Seien T_1, T_2 Hermite'sch. Es gilt: T_1T_2 ist Hermite'sch genau dann, wenn $T_1T_2 = T_2T_1$.

Beweis $(T_1T_2)^* = T_1T_2 \Leftrightarrow T_2^*T_1^* = T_1T_2 \Leftrightarrow T_2T_1 = T_1T_2$ □

Satz 2

(*i*) Sei T_1 Hermite'sch, dann ist $T_2^*T_1T_2$ Hermite'sch.

(*ii*) Umgekehrt ist $T_2^*T_1T_2$ Hermite'sch und T_2 invertierbar, dann ist T_1 Hermite'sch.

Beweis (i) $(T_2^* T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* T_2^{**} = T_2^* T_1 T_2$

(ii) $T_2^* T_1 T_2 = (T_2^* T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* T_2$, multipliziert links mit $(T_2^*)^{-1}$ und rechts mit T_2^{-1} ergibt $T_1 = T_1^*$. □

Definition $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist *schief Hermite'sch*, falls $T^* = -T$. (Wenn $K = \mathbb{C}$, heißt es "komplex schief Hermite'sch" und wenn $K = \mathbb{R}$, heißt es "schief symmetrisch".)

§ 18 Cartesische Zerlegung eines Operators

Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$, schreibe $T = T_1 + T_2$, wobei

$$T_1 := \frac{T + T^*}{2} \quad \text{und} \quad T_2 := \frac{T - T^*}{2}$$

Berechne:

$$T_1^* = T_1 \quad \text{und} \quad T_2^* = -T_2.$$

Also ist T_1 Hermite'sch und T_2 ist schief Hermite'sch.

Ferner T_2 ist schief Hermite'sch und $K = \mathbb{C} \Leftrightarrow T_2 = cT_3$ mit T_3 komplex Hermite'sch. Also $T = T_1 + cT_3$.

Unser Ansatz ist weiterhin: V endl. dim. inneres Produkt Raum

Satz 1 Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ Hermite'sch. Es gelten $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$ und alle Eigenwerte von T sind reell.

Beweis $(Tx \mid x) = (x \mid T(x)) = \overline{(Tx \mid x)}$.
Sei nun $Tx = cx$ mit $x \neq 0$, dann ist
$\underbrace{(Tx \mid x)}_{\in\mathbb{R}} = (cx \mid x) = c \underbrace{\|x\|^2}_{\in\mathbb{R}}$. Also $c \in \mathbb{R}$. □

Erinnerung T^* ist definiert durch $(Tx \mid y) = (x \mid T^*y)$ oder $(x \mid Ty) = (T^*x \mid y)$.

§ 19 Isometrie

Definition Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$, so dass $U^* = U^{-1}$, dann heißt U eine *Isometrie*. Wenn $K = \mathbb{R}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *orthogonal* und wenn $K = \mathbb{C}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *unitär*.

Satz 2 Für $U \in \mathcal{L}(V,V)$ sind äquivalent:

(1) $U^*U = UU^* = Id$

(2) $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle x, y (U erhält $(|)$)

(3) $\|Ux\| = \|x\|$ für alle x (U erhält die Norm)

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2):
$(Ux \mid Uy) = (x \mid U^*Uy) = (x \mid y)$ für alle $x, y \in V$

(2) $\Rightarrow$ (3):
(2) anwenden mit $x = y$

(3) $\Rightarrow$ (1):
$(Ux \mid Ux) = (U^*Ux \mid x) = (x \mid x)$. Also $([U^*U - Id]x \mid x) = 0$ für alle $x \in V$. Nun ist aber $T := U^*U - Id$ Hermite'sch und $(Tx \mid x) = 0$ für alle x impliziert $T = 0$ (dazu siehe Übungsblatt Nr. 12) □

Bemerkungen

(*i*) (3) impliziert, dass U Distanz erhält:
(4) $\|Ux - Uy\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$

(*ii*) Isometrien sind invertierbar und erhalten das innere Produkt. Also ist $U : (V, (|)) \xrightarrow{\sim} (V, (|))$ ein *Automorphismus* des inneren Produkt-Vektorraums $(V, (|))$.

Satz 3 Eigenwerte von Isometrien haben den absoluten Betrag gleich 1.

Beweis Sei $Ux = cx, x \neq 0; c \in \mathbb{C}$.
Es ist $\|Ux\| = \|x\|$ und $\|Ux\| = \|cx\| = |c|\ \|x\|$. Also $|\ c\ | = 1$. □

§ 20 Orthonormal-Basis wechseln (6. Juli 2012)

Satz 4 Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine orthonormale Basis und $U \in \mathcal{L}(V, V)$ eine Isometrie. Dann ist $\mathcal{U}\mathcal{X} := \{Ux_1, \dots, Ux_n\}$ eine orthonormale Basis. Umgekehrt ist $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis, so dass $\mathcal{U}\mathcal{X}$ wieder eine orthonormale Basis ist. Dann ist $\mathcal{U}$ eine Isometrie.

Beweis

"$\Rightarrow$" $(Ux_i \mid Ux_j) = (x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$. Also ist $\mathcal{U}\mathcal{X}$ orthonormal und $\mathcal{U}\mathcal{X}$ ist eine Basis, weil $\mathcal{U}$ invertierbar ist.

"$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{U}\mathcal{X}$ orthonormal. Es gilt also $(Ux_i \mid Ux_j) = \delta_{ij} = (x_i \mid x_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und damit durch Linearität gilt $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle $x, y \in V$. □

Matrix-Version

Definition $A \in M_{n \times n}(K)$ ist *orthogonal* $(K = \mathbb{R})$ oder *unitär* $(K = \mathbb{C})$, falls $AA^* = A^*A = I_n$ ist.

Bemerkungen

(i) Seien $\mathcal{U}$ eine Isometrie und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis, dann ist $A := [\mathcal{U}]_{\mathcal{X}}$ unitär (bzw. orthogonal).

(ii) Matrix-Version von Satz 4:
Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis und $\mathcal{B}'$ eine beliebige Basis, dann ist $\mathcal{B}'$ orthonormal genau dann, wenn die Basiswechsel-Matrix unitär ist.

§ 21 Spektral-Theorie

Sei wie immer $\dim V < \infty$.
Bisher haben wir drei wichtige Klassen von Operatoren studiert:
(a) Hermit'sche ($T^* = T$)
(b) schief Hermite'sche ($T^* = -T$)
(c) unitäre ($T^* = T^{-1}$).
Alle erfüllen die folgende Eigenschaft:

Definition $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist normal, falls $T^*T = TT^*$ ist.

Wir werden die Struktur von normalen Operatoren genau untersuchen.

Lemma 1 Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant, dann ist $W^\perp \subseteq V$ T^*-invariant.

Beweis Sei $u \in W^\perp, w \in W$ und berechne $(w \mid T^*u) = (Tw \mid u) = 0$ für alle $w \in W$. Also ist $T^*u \in W^\perp$. □

Wir wollen unseren Hauptsatz beweisen:

Satz (Spektralsatz für normale Operatoren)
Sei $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V, V)$ normal. $p := Min.Pol.(T)$. Es gilt

$$p = p_1, \dots p_k,$$

wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und p_i normiert und irreduzibel ist (d.h. $\deg p_i = 1$ oder $\deg p_i = 2$).
Setze $W_i := \ker p_i(T); W_i \subseteq V$ ist T-invariant. Dann ist W_i orthogonal zu W_j für $i \neq j$ und $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ (orthogonale direkte Summe).

Wir brauchen noch ein Lemma.

Erinnerung Lemma 1 - 06.07.2012:
$W \subseteq V$ ist T-invariant $\Rightarrow W^\perp \subseteq V$ ist T^*-invariant (oder $W \subseteq V$ ist T^*-invariant $\Rightarrow W^\perp$ ist T-invariant). Damit können wir eine Analogie zum Satz 2 der 14. Vorlesung vom 04.06.2012 zeigen.

Satz 1 (Orthonormale Trigonalisierung)
Sei $K = \mathbb{C}$ und V ein endlich dim. inneres Produkt K-Vektorraum; $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Dann gibt es eine orthonormale Basis $\mathcal{X}$, so dass $[T]_\mathcal{X}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis Induktion nach $n := \dim V$. Sei $c \in \mathbb{C}$ und $x \neq 0$ mit $T^*x = cx$, $W := (span\{x\})^\perp$ und $\dim W = \dim V - 1 = n - 1$.
Lemma 1 vom 06.07.2012 impliziert: W ist T-invariant , also ist $T \restriction W$ wohldefiniert.
Per Indutkionsannahme setze $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ als orthonormale Basis für W, wofür die Matrix-Darstellung von $T \restriction W$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
Setze $x_n := x/\|x\|$. Dann ist $\mathcal{X} := \{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ die gesuchte Basis. □

Korollar 1 Für jede $n \times n$-Matrix A über $\mathbb{C}$ gibt es eine unitäre Matrix U, so dass $U^{-1}AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis Wähle $\mathcal{X}$ als eine orthonormale Basis und definiere $T(x) = A\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$, wobei $x = \sum \varepsilon_i x_i$ ist, für $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Finde eine orthonormale Basis $\mathcal{J}$ wie in Satz 1.
Setze $U :=$ Matrix der Basiswechsel. Dann ist $U^{-1} = U^*$ und $U^{-1}AU = B$ die obere Dreiecksmatrix. □

§ 22 Orthonormale Diagonalisierung

Lemma 2 Sei T normal, $g(x) \in K[x]$ und $W := \ker g(T)$. Dann ist $W^\perp$ T-invariant.

Beweis **Behauptung:** W ist T^*-invariant.
Sei $u \in W$. Berechne $g(T)(T^*(a)) = T^*(g(T)(u)) = T^*(0) = 0$ (weil T^* kommutiert mit T, also auch mit $g(T)$).

Lemma 1 impliziert nun: $W^\perp$ ist T-invariant. □

Spektralsatz Sei T normal, $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $p = \text{Min Pol } (T)$. Es gilt

(*i*) $p = p_1 \cdots p_k$, wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, p_i ist irreduzibel und normiert.

(*ii*) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ für $W_i = \ker p_i(T)$ und W_i ist orthogonal zu W_j für $i \neq j$.

Hilfsbermerkung Ist g ein Faktor von $p := \text{Min. Pol. } (T)$, dann ist $g(T)$ **nicht** invertierbar.

Beweis
Sei $p = gh$ mit deg $h <$ deg p. Wäre $g(T)$ invertierbar , dann hätten wir $0 = g(T)^{-1}p(T) = g(T)^{-1}g(T)h(T)$ und damit $h(T) = 0$. Widerspruch zu deg p ist minimal. □

Beweis von Spektralsatz Per Induktion: Lemma 2 impliziert: $W_1^\perp$ ist T-invariant.
Betrachte $T \restriction_{W_1^\perp}$ und bemerke, dass $\ker p_1(T \restriction_{W_1^\perp}) = \{0\}$ ($x \in W_1^\perp$ und $x \in \ker p_1(T) = W_1 \Rightarrow x = 0$). Also ist $p_1(T \restriction_{W_1^\perp})$ invertierbar und damit ist p_1 **kein** Faktor von Min. Pol. $(T \restriction_{W_1^\perp}) = p_2 \cdots p_k$. Aber $p_1 = \text{Min. Pol. } (T \restriction_{W_1})$ und p_1 teilt nicht $p_2 \cdots p_k$. Also $p_1 \neq p_j$ für $j = 2, \dots, k$. (Argument: Forsetzung per Induktion). □

Korollar 2 $K = \mathbb{C}$. Sei T normal. Es gbit eine orthonormale Basis bestehend aus Eigenvektoren von T.

Beweis p_i ist linear über $\mathbb{C}$, also ist W_i der Eigenraum zum Eigenwert c_i. $p_i = (x - c_i)$
G-S: Wähle eine orthonormale Basis $\mathcal{X}_i$ für W_i $(i = 1, \dots, k)$. $\mathcal{X}_i$ besteht aus EigenV. zum EigenW. c_i. Also ist $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{X}_k$ die gewünschte Basis. □

Definition $B, A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

(*i*) A ist normal, falls $AA^* = A^*A$

(*ii*) A ist unitär äquivalent zu B, falls es eine unitäre $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mit $B = U^{-1}AU$ gibt.

Korollar 3 (Matrixversion von Korollar 2)
Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, A normal, dann ist A unitär äquivalent zu einer diagonalen Matrix $D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

§ 23 Anwendungen vom Spektralsatz

V endl. dim.

Korollar 4 $K = \mathbb{C}$, T ist normal. Es gilt: T ist Hermite'sch $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $\in \mathbb{R}$.

Beweis "$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien alle Eigenwerte reell und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis, bestehend aus EigenV. Also ist

$$D_i = [T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \text{ mit } d_i \in \mathbb{R}.$$

Es ist klar, dass D Hermite'sch ist $(D^* = \overline{D^t} = D^t = D)$. Also ist auch T Hermite'sch (Übungsblatt) □

Korollar 5 $K = \mathbb{C}, T$ ist normal. Es gilt: T ist unitär $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte haben den Absolutbetrag 1.

Beweis "$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien die Eigenwerte $z_i, \ldots z_n$ und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis bestehend aus EigenV, so dass

$$[T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} = D.$$

Behauptung: D ist unitär.

Berechne $D^* = \overline{A^t} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Also } DD^* &= \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1\overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n\overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n \end{aligned}$$

Also ist auch T unitär (Übungsblatt). □

Wir wollen nun den Spektralsatz im Fall $K = \mathbb{R}$ anwenden. Dann sind die p_i entweder linear $p_i = (x - r_i), r_i \in \mathbb{R}$ oder quadratisch irreduzibel, d.h. aus der Form $(x-a)^2 + b^2; a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

Beispiel Sei $r > 0; \theta \in \mathbb{R}; \theta \notin n\pi\mathbb{Z}$ (i.e. θ erfüllt $\sin\theta \neq 0$).
$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit Matrix (bzgl. standard orthonormale Basis $\{e_1, e_2\}$):
$A = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
A ist normal: $AA^t = A^tA$.

Sei $p = \text{Char. Pol. } (T) = \det(xI - A) = (x - r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta$.
Setze $a := r\cos\theta, b := r\sin\theta, b \neq 0$.
Also ist $p = (x-a)^2 + b^2$ irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$.
Also ist Min. Pol. $T = p$.
Wir zeigen nun die Umkehrung.

Satz Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V,V)$ normal mit Min. Pol. $T := p = (x-a)^2 + b^2, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.
Es gilt: Es existieren 2-dimensionale T-invariante Unterräume $V_1, \ldots, V_s (s = \frac{n}{2}$, so dass

(i) V_i orthogonal zu V_j ist für $i \neq j$

(ii) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$

(iii) V_j eine orthonormale Basis $\{\alpha_j, \beta_j\}$ hat, so dass $T\alpha_j = a\alpha_j + b\beta_j$ und $T\beta_j = -b\alpha_j + a\beta_j$ (das heißt $[T \upharpoonright V_j]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, wobei $\{\alpha_j, \beta_j\}$ die geordnete orthonormale Basis ist) und

(iv) Char. Pol. $(T) = p^s$

(v) $[T^* \upharpoonright_{V_j}]_{\{\alpha_j, \beta_i\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

(vi) $TT^* = (a^2 + b^2)I$

(Also setze $r := \sqrt{a^2 + b^2}$, wähle θ mit $a = r\cos\theta$ und $b = r\sin\theta$. Dann ist V die orthogonale direkte Summe von 2 dimensionalen Unterräumen und die Beschränkung $T \upharpoonright V_i$ ist "r-mal eine Drehung um die Winkel θ".)

Wir brauchen eine Bemerkung und ein Hilfslemma, bevor wir den Satz beweisen.

Bemerkung

(i) Sei $K = \mathbb{R}, U \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt $(U\alpha \mid \beta) = (U^*\beta \mid \alpha)$ für $\alpha, \beta \in V$.

(ii) Sei nun U normal, dann gilt $\|U\alpha\| = \|U^*\alpha\|$ für alle $\alpha \in V$.

Beweis

(i) $(U^*\beta \mid \alpha) = (\beta \mid U\alpha) = (\overline{U\alpha \mid \beta}) = (U\alpha \mid \beta)$.

(ii) $\|U\alpha\|^2 = (U\alpha \mid U\alpha) = (\alpha \mid U^*U\alpha) =$
$(\alpha \mid UU^*\alpha) = (U^*\alpha \mid U^*\alpha) = \|U^*\alpha\|^2$. □

Hilfslemma Sei $K = \mathbb{R}$ und S normal, so dass $S^2 + I = 0$.
Sei $\alpha \in V$ und setze $\beta := s\alpha$. Es ist $s^*\alpha = -\beta$ und $s^*\beta = \alpha$ (†)
und $(\alpha \mid \beta) = 0$ und $\|\alpha\| = \|\beta\|$.

Beweis $s\alpha = \beta$ und $s\beta = s^2\alpha = -\alpha$. Also
$0 = \|s\alpha - \beta\|^2 + \|s\beta + \alpha\|^2 = \|s\alpha\|^2 - 2(s\alpha \mid \beta) + \|\beta\|^2 + \|s\beta\|^2 + 2(s\beta \mid \alpha) + \|\alpha\|^2$.
Da S normal ist, folgt (Bemerkung + Hilfslemma)
$0 = \|s^*\alpha\|^2 - 2(s^*\beta \mid \alpha) + \|\beta\|^2 + \|s^*\beta\|^2 + 2(s^*\alpha \mid \beta) + \|\alpha\|^2 = \|s^*\alpha + \beta\|^2 + \|s^*\beta - \alpha\|^2$.
Daraus folgt (†).
Berechne nun $(\alpha \mid \beta) = (s^*\beta \mid \beta) = (\beta \mid s\beta) = (\beta \mid -\alpha) = -(\alpha \mid \beta)$. Also $(\alpha \mid \beta) = 0$.
Schließlich $\|\alpha\|^2 = (s^*\beta \mid \alpha) = (\beta \mid s\alpha) = (\beta \mid \beta) = \|\beta\|^2$. □

Beweis vom Satz Sei $\{V_1, \dots, V_s\}$ eine maximale Menge von 2 dimensionalen Unterräumen mit den Eigenschaften:

- (i) V_i ist orthonormal zu V_j
- (iii) und
- (v) $T^*\alpha_j = a\alpha_j - b\beta_j$ und $T^*\beta_j = b\alpha_j + a\beta_j$ für $1 \le j \le s$

Setze $W := V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$.

Behauptung: $W = V$

Sonst ist $W^\perp \neq \{0\}$ und (iii) + (v) implizieren außerdem, dass W, T und T^* invariant ist. Also ist $W^\perp$ T^* und $T^{**} = T$ invariant.
Setze $S := b^{-1}(T - aI)$. Bermerke, dass $S^* = b^{-1}(T^* - aI)$, so $S^*S = SS^*$ (S normal) und $W^\perp$ ist auch S und S^* invariant und $(T - aI)^2 + b^2 I = 0$ impliziert $S^2 + I = 0$.
Also können wir Hilfslemma für S und $W^\perp$ anwenden.
Wir bekommen

$$\begin{array}{ll} \alpha \in W^\perp, & \|\alpha\| = 1 \\ \beta := S\alpha, & \beta \in W^\perp \text{ und} \\ S\beta = -\alpha. & \end{array}$$

Da $T = aT + bS$ haben wir außerdem

$$\left.\begin{array}{rcr} T\alpha &=& a\alpha + b\beta \\ T\beta &=& -b\alpha + a\beta \end{array}\right\} (iii)$$

Darüber hinaus

$$\begin{array}{rcl} S^*\alpha &=& -\beta \\ S^*\beta &=& \alpha \\ (\alpha \mid \beta) &=& 0 \text{ und} \\ \|\beta\| &=& 1. \end{array}$$

Nun ist $T^* = aI + bS^*$. Also

$$\left.\begin{array}{rcl} T^*\alpha &=& a\alpha - b\beta \\ T^*\beta &=& b\alpha + a\beta \end{array}\right\} (v)$$

Widerspruch zur maximalen Wahl von $\{V_1, \dots, V_s\}$, also $W = V$.

Beweis, Forts. Nun

$$\det\begin{pmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{pmatrix} = (x-a)^2 + b^2.$$

Es folgt aus (i), (ii) und (iii) nun, dass $\det(xI - T) = [(x-a)^2 + b^2]^s$. □

(vi) T ist invertierbar und $T^* = (a^2 + b^2)T^{-1}$

Beweis Aus (iii) und (v) haben wir

$$[T \restriction_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$[T^* \restriction_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ und}$$

Nun ist aber:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} =$$

$[T^* \restriction_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}}[T \restriction_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = [T^*T \restriction_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = (a^2 + b^2)I_2$.

Also $T^*T = (a^2 + b^2)I$. □