Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra II
Übungsblatt 11

Seien in folgenden stets $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, V ein K-Vektorraum und $(\ |\ ) : V \times V \to K$ ein inneres Produkt auf V. Sei $\rho : V^* \to V$ wie in Satz 4, Vorlesung 20.

Aufgabe 11.1

(a) Zeigen Sie, dass
$$(f_1|f_2) := (\rho(f_2)|\rho(f_1))$$
ein inneres Produkt auf V^* ist.

(b) Zeigen Sie, dass
$$(f_1|f_2) := (\rho(f_1)|\rho(f_2))$$
nicht immer ein inneres Produkt auf V^* ist.

Aufgabe 11.2

(a) Zeigen Sie, dass
$$\rho(W^0) = W^{\perp}$$
gilt.

(b) Sei $\mathcal{X} := \{x_1, ..., x_n\}$ eine Basis für V. Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{Y} = \{y_1, ..., y_n\}$ für V existiert mit
$$(x_i|y_j) = \delta_{i,j}.$$

(c) Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$.

Aufgabe 11.3
Sei T ein Hermite'sche Operator (Selbst-Adjungierte) auf V mit innerem Produkt $(\ |\ )$. Zeigen Sie, dass $T = 0$ genau dann gilt, wenn $(Tx, x) = 0$ für alle $x \in V$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie den Fall des reellen symmetrischen Operators und den Fall des complexen Hermite'schen Operators getrennt.

Aufgabe 11.4
Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Definiere T^* durch

$$(Tx|y) := (x|T^*y)$$

für alle $x \in V$ (wie in Satz 20, Vorlesung 20).

(a) Zeigen Sie, dass:

  (i) T^* ist wohldefiniert

  und T^* hat die folgenden Eigenschaften:

  (ii) $T^* \in \mathcal{L}(V, V)$
  (iii) Für alle $c \in K$ $(cT)^* = \overline{c}T^*$.
  (iv) Sei $[T]_{\mathcal{X}} := A$ und $\mathcal{Y}$ die Basis aus Aufgabe 10.2. Es gilt

$$[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} =: A^*.$$

  (v) $\det A^* = \overline{\det A}$.
  (vi) Die Eigenwerte von A^* sind die Konjugierten der Eigenwerte von A.
  (vii) $T^{**} = T$

(b) Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, V)$. Zeigen Sie, dass $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 16.07.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
