

Universität Konstanz

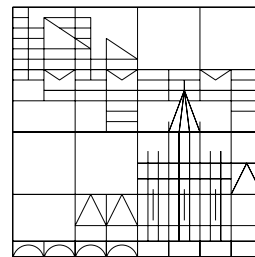
Fachbereich

Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Dr. Lorna Gregory

Katharina Dupont



Lineare Algebra II

Übungsblatt 11

Seien in folgenden stets $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, V ein K -Vektorraum und $(\mid) : V \times V \rightarrow K$ ein inneres Produkt auf V . Sei $\rho : V^* \rightarrow V$ wie in Satz 4, Vorlesung 20.

Aufgabe 11.1

(a) Zeigen Sie, dass

$$(f_1 \mid f_2) := (\rho(f_2) \mid \rho(f_1))$$

ein inneres Produkt auf V^* ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$(f_1 \mid f_2) := (\rho(f_1) \mid \rho(f_2))$$

nicht immer ein inneres Produkt auf V^* ist.

Aufgabe 11.2

(a) Zeigen Sie, dass

$$\rho(W^\perp) = W^0$$

gilt.

(b) Sei $\mathcal{X} := \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis für V . Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ für V existiert mit

$$(x_i \mid y_j) = \delta_{i,j}.$$

(c) Sei \mathcal{X} eine orthonormale Basis. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$.

Aufgabe 11.3

Sei T ein Hermite'sche Operator (Selbst-Adjungierte) auf V mit innerem Produkt $(\cdot | \cdot)$. Zeigen Sie, dass $T = 0$ genau dann gilt, wenn $(Tx, x) = 0$ für alle $x \in V$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie den Fall des reellen symmetrischen Operators und den Fall des komplexen Hermite'schen Operators getrennt.

Aufgabe 11.4

Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Definiere T^* durch

$$(Tx|y) := (x|T^*y)$$

für alle $x \in V$ (wie in Satz 20, Vorlesung 20).

(a) Zeigen Sie, dass:

(i) T^* ist wohldefiniert

und T^* hat die folgenden Eigenschaften:

(ii) $T^* \in \mathcal{L}(V, V)$

(iii) Für alle $c \in K$ $(cT)^* = \bar{c}T^*$.

(iv) Sei $[T]_{\mathcal{X}} := A$ und \mathcal{Y} die Basis aus Aufgabe 10.2. Es gilt

$$[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} =: A^*.$$

(v) $\det A^* = \overline{\det A}$.

(vi) Die Eigenwerte von A^* sind die Konjugierten der Eigenwerte von A .

(vii) $T^{**} = T$

(b) Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, V)$. Zeigen Sie, dass $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe **Montag, 16.07.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
