Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1
Sei B ein kommutativer Ring mit Eins und A ein Unterring von A. Ein Element $b \in B$ heißt **ganz** über A, wenn es ein normiertes Polynom $p \in A[x]$ gibt, so dass $p(b) = 0$ ist.

Sei R ein faktorieller Ring und sei Q der Quotientenkörper von R. Ferner seien K eine Körpererweiterung von Q und $\alpha \in K$ algebraisch über Q.
Zeigen Sie, dass α genau dann ganz über R ist, wenn das Minimalpolynom von α über Q in $R[x]$ ist.
Folgern Sie, dass $\beta \in Q$ genau dann ganz über R ist, wenn $\beta \in R$ ist.

Aufgabe 1.2
Ein kommutativer Ring heißt **noethersch**, wenn er keine unendliche Folge

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$$

von Idealen hat.

(a) Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass jede Nichteinheit $a \in R \backslash \{0\}$ als Produkt von irreduziblen Elementen in R geschrieben werden kann.

(b) Angenommen nun, dass jedes irreduzible Element aus R auch prim ist. Zeigen Sie, dass R faktoriell ist.

Aufgabe 1.3

(a) Zeigen Sie, dass $2, 3, 1 + \sqrt{-5}$ und $1 - \sqrt{-5}$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $2, 3, 1 + \sqrt{-5}$ und $1 - \sqrt{-5}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht paarwise assoziiert sind.

(c) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kein faktorieller Ring ist.

Hinweis: In Teil (a) und Teil (b) betrachten Sie die (multiplikative) Abbildung $N : \mathbb{Q}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Q}$ definiert durch $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$.

Aufgabe 1.4
Zeigen Sie, dass die Ideale $\langle 2, 1+\sqrt{5}\rangle$, $\langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle$ und $\langle 3, 1+\sqrt{5}\rangle$ prim sind.
Wir haben schon in der Vorlesung gezeigt, dass $\langle 3, 1-\sqrt{5}\rangle$ ein Primideal ist.

Wir haben schon in der Vorlesung gezeigt, dass

$$\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle = \langle 2\rangle$$

gilt.
Zeigen Sie, dass

$$\langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1-\sqrt{-5}\rangle = \langle 3\rangle,$$
$$\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle = \langle 1+\sqrt{-5}\rangle,$$
$$\langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1-\sqrt{-5}\rangle = \langle 1-\sqrt{-5}\rangle$$

und

$$\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1-\sqrt{-5}\rangle = \langle 6\rangle$$

gilt.

Abgabe **Montag, 29.04.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
