2. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 12. April 2016

NB $f \in K[\![x]\!]$ definiere Support $f := \{n \in \mathbb{N}_0; f_n \neq 0\}$

(i) Support $f = \emptyset$ genau dann, wenn $f = 0$

(ii) Support f ist endlich genau dann, wenn $f \in K[x]$

(iii) $f \neq 0$. Support f endlich; es gilt deg f = max Support f.

Satz 1 Seien $f, g \in K[x]$ und $f, g \neq 0$. Es gilt

(i) $fg \neq 0$

(ii) deg (fg) = deg f + deg g

(iii) fg ist normiert, falls f und g normiert sind

(iv) fg ist skalar $\Leftrightarrow$ f und g skalar sind

(v) Falls $f + g \neq 0$, gilt deg $(f + g) \leq$ max (deg f, deg g)

Beweis Sei deg $f := m$ und deg $g := n$.
Behauptung: $(*)$ $(fg)_{m+n} = f_m g_n$ und $(**)$ $(fg)_{m+n+k} = 0, k > 0$.
Wir berechnen $(fg)_{m+n+k} = \sum_{i=0}^{m+n+k} f_i g_{m+n+k-i}$.
Welche Beträge sind ungleich Null?
$f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow i \leq m, (f_i \neq 0)$ und $m + n + k - i \leq n$ also $m + k \leq i$.
Das heißt: $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow m + k \leq i \leq m$, i.e. $k = 0$ und $m = i$, wie behauptet.
Nun implizieren $(*)$ und $(**)$ unmittelbar (i), (ii) und (iii). Auch (i) und (ii) implizieren (iv).
(v): ÜA, ÜB. □

Korollar 1 $K[x]$ ist eine kommutative K-Algebra mit Einheit.

Beweis $K[x]$ ist ein Unterraum von $K[\![x]\!]$. Es genügt also zu prüfen, dass $K[x]$ unter Produkte abgeschlossen ist, i.e. $f, g \in K[x] \Rightarrow fg \in K[x]$. Dieses folgt aus Satz 1 Punkt (ii). □

Korollar 2 $f, g, h \in K[x]; f \neq 0$. Aus $fg = fh$ folgt $g = h$.

Beweis $K[x]$ ist ein Integritätsbereich (siehe Satz 1 Punkt (i)). □

NB

$$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \big(\sum_{r=0}^{s} f_r g_{s-r}\big) x^s \text{ für } f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i \text{ und } g = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i.$$

Insbesondere $cx^m dx^m = cdx^{m+n}$ und $fg = \sum_{0\leq i\leq m} \sum_{0\leq j\leq n} f_i g_j x^{i+j}$.

Definition $f : K \longrightarrow K$ ist eine *polynomiale Funktion*, falls es $c_0, \dots, c_n \in K$ gibt, so dass $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ für alle $x \in K$.

NB Eine polynomiale Funktion ist etwas anderes als ein Polynom. Wir werden die Beziehung genau analysieren.

Definition Sei $\mathcal{A}$ eine K-Algebra mit 1; $f \in K[x]$; $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$; $\alpha \in \mathcal{A}$.

Definiere $f(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i$ mit $\alpha^0 := 1$.

Beispiel 1 $\mathcal{A} = K$. $f \in K[x]$ bestimmt also eine polynomiale Funktion $\tilde{f} : K \longrightarrow K$.

Beispiel 2 $\mathcal{A} = M_{2\times 2}(K)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f = x^2 + 2$$

$$f(B) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2.$$

Satz 2 $\mathcal{A}$ ist eine K-Algebra mit 1. $f, g \in K[x]; \alpha \in \mathcal{A}, c \in K$. Es gilt

(i) $(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$

(ii) $(fg)(\alpha = f(\alpha)g(\alpha)$

Beweis Übungsaufgabe

Beispiel 1 Noch einmal: Sei $\alpha \in \mathcal{A}$ fixiert.

$$\begin{array}{llcl} L_\alpha : & K[x] & \longrightarrow & K \\ & f & \longmapsto & f(\alpha) \end{array} \quad \text{ist eine lineare Funktionale.}$$

NB Beispiel $f \neq 0$, aber $\tilde{f} = 0$. $(x^p - x)$ für p Primzahl verschwindet auf $\mathbb{F}_p$, e.g. $f = x^3 - x = x^3 + 2x \in \mathbb{F}_3[x]$.

$f \neq 0$, weil $(f)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0, 2, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \neq (0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$.

Aber $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ in $\mathbb{F}_3$. So ist $\tilde{f} : \mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3$ die Nullabbildung (mehr dazu im Übungsblatt).
Wenn aber K unendlich ist, haben wir solche Beispiele nicht! Wir werden dieses genau untersuchen.

Notation Sei $K[x]^\sim$ der K-Vektorraum der polynomialen Funktionen.

Proposition $K[x]^\sim$ ist eine K-Algebra (mit 1) versehen mit der punktweisen Multiplikation $(\tilde{f}\tilde{g})(t) := \tilde{f}(t)\tilde{g}(t); t \in K$.