

9. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehericy

SS 2016: 10. Mai 2016

Korollar 1 $\dim(\text{alt}^{(n)}(K^n)) = 1.$

Das heißt $\delta(A) = \det(A)\delta(I_n)$ für $A \in M_{n \times n}(K)$ und $\delta \in \text{alt}^{(n)}$.

Beweis Da $\det \in \text{alt}^{(n)}$ und $\det \neq 0$, ist $\dim(\text{alt}^{(n)}) = 1$.

Sei $\delta \in \text{alt}^{(n)}$. Also ist $\delta = d \det$ für $d \in K$. Nun muss gelten $\delta(I_n) = d \det(I_n)$, also $d = \delta(I_n)$. □

Bemerkung Sei R ein kommutativer Ring mit 1. $\delta \in \text{alt}^{(n)}(R^n)$ ist analog definiert. Der Hauptsatz gilt auch in diesem erweiterten Rahmen:

Sei $A \in M_{n \times n}(R)$; $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Definiere:

$$\det(A) := \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Dann ist \det die eindeutige Funktionale $\delta \in \text{alt}^{(n)}(R^n)$ mit der Eigenschaft $\delta(I_n) = 1$.

Beispiel $R = K[x]$.

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$$

Sei $\delta \in \text{alt}^{(3)}(M_{3 \times 3}(R))$: $\delta(A) = \delta(x\varepsilon_1 - x^2\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3)$,
wobei $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$ und $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ (die Standard-Vektoren).

$$\begin{aligned} \delta(A) &= x\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) \\ &= x\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1) + x^4\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1) - x^5\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \\ &= (x^4 + x^2)\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Satz 1 Sei $A \in M_{n \times n}(R)$. Es gilt: $\det(A) = \det(A^T)$.

Erinnerung $(A^T)_{ji} = A_{ij}$ oder $a_{ji}^T = a_{ij}$

Beweis Betrachte

$$\prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = \prod_{i,j=1,j=\pi(i)}^n a_{ij} = \prod_{i,j=1,i=\pi^{-1}(j)}^n a_{ij} = \prod_{j=1}^n a_{\pi^{-1}(j)j} = \prod_{j=1}^n a_{j\pi^{-1}(j)}^T$$

für $\pi \in S_n$.

Wir berechnen nun

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \text{sign}(\pi^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{j\pi^{-1}(j)}^T = \det(A^T). \quad \square$$

Satz 2 $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, für $A, B \in M_{n \times n}(R)$.

Beweis Fixiere $B \in M_{n \times n}(R)$. Definiere $\delta_B(A) := \det(AB)$; $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$.

Also $\delta_B(z_1, \dots, z_n) = \det(z_1 B, \dots, z_n B)$.

n linear?

$$\delta_B(z_1 + cz'_1, z_2, \dots, z_n) = \det((z_1 + cz'_1)B, \dots, z_n B) = \det(z_1 B, z_2 B, \dots, z_n B) + c \det(z'_1 B, z_2 B, \dots, z_n B).$$

alternierend?

$$\delta_B(z_1, z_1, \dots, z_n) = \det(z_1 B, z_1 B, \dots, z_n B) = 0.$$

$$\dim(\text{alt}^{(n)}) = 1 \Rightarrow \delta_B(A) = \det(A) \delta_B(I_n) = \det(A) \det(B). \quad \square$$

Korollar Sei A invertierbar. Es gilt $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$.

Beweis $\det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1. \quad \square$

Notation Sei $A \in M_{n \times n}(R)$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$ fixiert.
 $A[i | j]$ ist die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die man nach Entfernung der i -ten Zeile und j -ten Spalte von A bekommt.
 $D_{ij}(A) := \det(A[i | j])$.

Satz 3 Fixiere j mit $1 \leq j \leq n$. Betrachte

$$\delta(A) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$

Es ist $\delta \in \text{alt}^{(n)}$ und $\delta(I_n) = 1$.

Korollar (Spaltenentwicklung:)
 Sei $A \in M_{n \times n}(R)$. Für jedes $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A).$$

Beweis von Satz 3:

für $A = I_n$; $a_{ij} = 0$, wenn $i \neq j$. Also betrachte nun $i = j$, i.e. $a_{jj} = 1$.
 Wir bekommen $\delta(I_n) = (-1)^{2j} \cdot a_{jj} \det(I_{n-1}) = (-1)^{2j} \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

alternierend?

Sei $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ und seien $z_k = z_\ell$ für $k < \ell$.

Falls $i \neq k$ und $i \neq \ell$, hat $A[i | j]$ zwei gleiche Zeilen. So $D_{ij}(A) = 0$.

Beweis, Forts. Also betrachten wir nur $i = k$ oder $i = \ell$:

$$\begin{aligned} \delta(A) &= (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{\ell j} D_{\ell j}(A) \\ &= (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} a_{kj} D_{\ell j}(A) \end{aligned} \tag{*}$$

weil $a_{\ell j} = a_{kj}$ ist.

Betrachte:

$$A[k | j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_{k-1}^- \\ z_{k+1}^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A[\ell | j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_k^- \\ \vdots \\ z_{\ell-1}^- \\ z_{\ell+1}^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix}$$

(I)
(II)

(I): $z_\ell^- = z_k^-$ ist hier von der $(\ell - 1)$ -ten Zeile.

(II): $z_\ell^- = z_k^-$ ist hier von der k -ten Zeile.

Ein Vergleich von (I) und (II) ergibt: $A[k | j]$ und $A[\ell | j]$ haben die gleichen Zeilen, bis auf die Permutation der Zeilen!!

Man kann aber durch wiederholte Zeilenumformungen aus Typ 1 $A[\ell | j]$ aus $A[k | j]$ erhalten, indem man die $(\ell - 1)$ -te Zeile in (I) bis zur k -ten Zeile in (II) rückt. Dafür benötigt man $(\ell - 1) - k$ Transpositionen [:= Permutationen der Gestalt $(\ell - 1 \ \ell - 2)$, dann $(\ell - 2 \ \ell - 3) \dots$ bis $(\ell - (\ell - k - 1) \ \ell - (\ell - k))$] i.e. bis $(k + 1 \ k)$].

Zusammenfassend: Setze $\pi := (k + 1 \ k) \dots (\ell - 1 \ \ell - 2)$; $\pi \in S_{n-1}$.

$sign(\pi) = (-1)^{(\ell-1)-k}$. Also $D_{\ell j}(A) = (-1)^{(\ell-1)-k} D_{kj}(A)$.

Zurück zu (*):

$$\delta(A) = (-1)^j \left[\underbrace{(-1)^k a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{1. Term}} + \underbrace{(-1)^{2\ell-1-k} a_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{2. Term}} \right]$$

Aber $(-1)^k = -[(-1)^{2\ell-1-k}] = (-1)^{2(\ell-1)-k}$.

Also kürzen sich 1. Term und 2. Term ab und damit ist $\delta(A) = 0$ wie behauptet.

n -linear?

Hinweis: Übungsaufgabe, Übungsblatt: Zeige: für i, j fixiert ist $a_{ij} D_{ij}(A)$ eine n -lineare Funktion in A .

Eine lineare Kombination von n -linearen ist n -linear. Also ist δ n -linear. □