

12. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy
SS 2016: 24. Mai 2016

Bemerkung am Ende der 11. Vorlesung
 $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$ und d_1, \dots, d_n sind verschiedene Eigenwerte, α_i ist Eigenvektor zum Eigenwert d_i . Setze $\mathcal{D} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Dann ist \mathcal{D} eine Basis und

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

eine diagonale Matrix.

Korollar 1 Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$ und d_1, \dots, d_k verschiedene Eigenwerte. Für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ sei $\mathcal{B}_i \subseteq W_{d_i}$ linear unabhängig. Dann ist $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ auch linear unabhängig.

Beweis Sei $L := \{v_1, \dots, v_\ell\} \subseteq \mathcal{B}$. Betrachte eine lineare Kombination $\sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j$. Nun setze $L_i := L \cap \mathcal{B}_i$ und setze $\alpha_i := \sum_{v_j \in L_i} c_j v_j$ (*)

falls $L_i \neq \emptyset$ (und $\alpha_i := 0$ per Konvention, falls $L_i = \emptyset$). Dann ist $\alpha_i \in W_{d_i}$. Also ist $0 = \sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j = \sum_{i=1}^k \alpha_i$ nur möglich, wenn $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, k$. (Da sonst die $\alpha_i \neq 0$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten **und** gleichzeitig linear abhängig wären. Widerspruch zu Lemma 2 der 11. Vorlesung!) Nun sind die v_j in (*) linear unabhängig. Also $c_j = 0$ für alle j wie behauptet. \square

Lemma 1 Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$ und d_1, \dots, d_k die verschiedenen Eigenwerte von T .
 Es gilt: T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k \dim W_{d_j} = n$.

Beweis “ \Rightarrow ” Sei \mathcal{B} eine Basis von Eigenvektoren. Setze $\mathcal{B}_j := \mathcal{B} \cap W_{d_j}$.

Also ist $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{B}_j$.

Setze $\ell_j := |\mathcal{B}_j|$. Also ist $n = |\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^k \ell_j$.

Behauptung

$\ell_j = \dim W_{d_j}$.

Es ist klar, dass $\ell_j \leq \dim W_{d_j}$. Ist $\ell_i < \dim W_{d_i}$, dann existiert ein $\beta \in W_{d_i}$ mit $\mathcal{B}'_i := \mathcal{B}_i \cup \{\beta\}$ linear unabhängig. Aber dann ist

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{\beta\} = \bigcup_{j \neq i} \mathcal{B}_j \cup \mathcal{B}'_i$$

linear unabhängig (Korollar 1) und $|\mathcal{B}'| = n + 1$. Widerspruch (unmöglich).

Beweis

Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ eine Basis von W_d .

Ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \alpha_{\ell+1}, \dots, \alpha_n\}$ von V .

Es ist

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & d & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \begin{array}{ccc} B \\ \\ \\ \\ \\ C \end{array} \right)$$

Wir berechnen Char. Pol. (A) .

$$\det(xI - A) = \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} x-d & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & x-d & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \begin{array}{ccc} -B \\ \\ \\ \\ \\ xI - C \end{array} \right) = (x-d)^\ell \det(xI - C)$$

Also ist $\ell \leq \mu$. □

T in den Beispielen 1 und 2 der 11. Vorlesung sind beide **nicht** diagonalisierbar.

Beispiel 3 $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$

Char. Pol. $(A) = (x-1)(x-2)^2$ (wie in Beispiel 2!).

$d_1 = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Rang $(A - I) \neq 3$, weil $A - I$ singularär ist. Es ist klar, dass Rang $(A - I) \geq 2$.
Also Rang $(A - I) = 2$.

$d_2 = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Rang $(A - 2I) = 1$.

Also ist $\dim W_{d_1} = 1$ und $\dim W_{d_2} = 2$ und $\dim W_{d_1} + \dim W_{d_2} = 3$. Also ist T diagonalisierbar: Es existiert eine Basis \mathcal{D} von \mathbb{R}^3 , so dass

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$