

24. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 7. Juli 2016

Wir wollen nun den Spektralsatz im Fall $K = \mathbb{R}$ anwenden. Dann sind die p_i entweder linear $p_i = (x - r_i)$, $r_i \in \mathbb{R}$ oder quadratisch irreduzibel, d.h. aus der Form $(x - a)^2 + b^2$; $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Beispiel Sei $r > 0$; $\theta \in \mathbb{R}$; $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ (i.e. θ erfüllt $\sin \theta \neq 0$).

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit Matrix (bzgl. standard orthonormale Basis $\{e_1, e_2\}$):

$$A = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

A ist normal: $AA^t = A^t A$.

Sei $p = \text{Char. Pol. } (T) = \det(xI - A) = (x - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta$.

Setze $a := r \cos \theta$, $b := r \sin \theta$, $b \neq 0$.

Also ist $p = (x - a)^2 + b^2$ irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$.

Also ist Min. Pol. $T = p$.

Wir zeigen nun die Umkehrung.

Satz Sei $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ normal mit Min. Pol. $T := p = (x - a)^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Es gilt: Es existieren 2-dimensionale T -invariante Unterräume V_1, \dots, V_s ($s = \frac{n}{2}$), so dass

(i) V_i orthogonal zu V_j ist für $i \neq j$

(ii) $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$

(iii) V_j eine orthonormale Basis $\{\alpha_j, \beta_j\}$ hat, so dass $T\alpha_j = a\alpha_j + b\beta_j$ und $T\beta_j = -b\alpha_j + a\beta_j$ (das heißt $[T \upharpoonright V_j]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, wobei $\{\alpha_j, \beta_j\}$ die geordnete orthonormale Basis ist) und

(iv) Char. Pol. $(T) = p^s$

(v) $[T^* \upharpoonright V_j]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

(vi) $TT^* = (a^2 + b^2)I$

(Also setze $r := \sqrt{a^2 + b^2}$, wähle θ mit $a = r \cos \theta$ und $b = r \sin \theta$. Dann ist V die orthogonale direkte Summe von 2-dimensionalen Unterräumen und die Beschränkung $T \upharpoonright V_i$ ist “ r -mal eine Drehung um die Winkel θ ”.)

Wir brauchen eine Bemerkung und ein Hilfslemma, bevor wir den Satz beweisen.

Bemerkung (i) Sei $K = \mathbb{R}, U \in \mathcal{L}(V, V)$. Es gilt $(U\alpha | \beta) = (U^*\beta | \alpha)$ für $\alpha, \beta \in V$.
(ii) Sei nun U normal, dann gilt $\|U\alpha\| = \|U^*\alpha\|$ für alle $\alpha \in V$.

Beweis (i) $(U^*\beta | \alpha) = (\beta | U\alpha) = \overline{(U\alpha | \beta)} = (U\alpha | \beta)$.
(ii) $\|U\alpha\|^2 = (U\alpha | U\alpha) = (\alpha | U^*U\alpha) = (\alpha | UU^*\alpha) = (U^*\alpha | U^*\alpha) = \|U^*\alpha\|^2$. □

Hilfslemma Sei $K = \mathbb{R}$ und S normal, so dass $S^2 + I = 0$.
Sei $\alpha \in V$ und setze $\beta := S\alpha$. Es ist $S^*\alpha = -\beta$ und $S^*\beta = \alpha$ (†)
und $(\alpha | \beta) = 0$ und $\|\alpha\| = \|\beta\|$.

Beweis $S\alpha = \beta$ und $S\beta = S^2\alpha = -\alpha$. Also
 $0 = \|S\alpha - \beta\|^2 + \|S\beta + \alpha\|^2 = \|S\alpha\|^2 - 2(S\alpha | \beta) + \|\beta\|^2 + \|S\beta\|^2 + 2(S\beta | \alpha) + \|\alpha\|^2$.
Da S normal ist, folgt (Bemerkung + Hilfslemma)
 $0 = \|S^*\alpha\|^2 - 2(S^*\beta | \alpha) + \|\beta\|^2 + \|S^*\beta\|^2 + 2(S^*\alpha | \beta) + \|\alpha\|^2 = \|S^*\alpha + \beta\|^2 + \|S^*\beta - \alpha\|^2$.
Daraus folgt (†).
Berechne nun $(\alpha | \beta) = (S^*\beta | \beta) = (\beta | S\beta) = (\beta | -\alpha) = -(\alpha | \beta)$. Also $(\alpha | \beta) = 0$.
Schließlich $\|\alpha\|^2 = (S^*\beta | \alpha) = (\beta | S\alpha) = (\beta | \beta) = \|\beta\|^2$. □

Beweis vom Satz Sei $\{V_1, \dots, V_s\}$ eine maximale Menge von 2 dimensionalen Unterräumen mit den Eigenschaften:

- (i) V_i ist orthogonal zu V_j
- (iii) und
- (v) $T^*\alpha_j = a\alpha_j - b\beta_j$ und $T^*\beta_j = b\alpha_j + a\beta_j$ für $1 \leq j \leq s$

Setze $W := V_1 \oplus \dots \oplus V_s$.

Behauptung: $W = V$

Sonst ist $W^\perp \neq \{0\}$ und (iii) + (v) implizieren außerdem, dass W, T und T^* invariant ist. Also ist W^\perp, T^* und $T^{**} = T$ invariant.

Setze $S := b^{-1}(T - aI)$. Bermerke, dass $S^* = b^{-1}(T^* - aI)$, so $S^*S = SS^*$ (S normal) und W^\perp ist auch S und S^* invariant und $(T - aI)^2 + b^2I = 0$ impliziert $S^2 + I = 0$.

Also können wir Hilfslemma für S und W^\perp anwenden.

Wir bekommen

$$\begin{aligned} \alpha &\in W^\perp, & \|\alpha\| &= 1 \\ \beta &:= S\alpha, & \beta &\in W^\perp \text{ und} \\ S\beta &= -\alpha. \end{aligned}$$

Da $T = aT + bS$ haben wir außerdem

$$\left. \begin{aligned} T\alpha &= a\alpha + b\beta \\ T\beta &= -b\alpha + a\beta \end{aligned} \right\} (iii)$$

Beweis, Forts. Darüber hinaus

$$\begin{aligned} S^* \alpha &= -\beta \\ S^* \beta &= \alpha \\ (\alpha \mid \beta) &= 0 \text{ und} \\ \|\beta\| &= 1. \end{aligned}$$

Nun ist $T^* = aI + bS^*$. Also

$$\left. \begin{aligned} T^* \alpha &= a\alpha - b\beta \\ T^* \beta &= b\alpha + a\beta \end{aligned} \right\} (v)$$

Widerspruch zur maximalen Wahl von $\{V_1, \dots, V_s\}$, also $W = V$.

Nun

$$\det \begin{pmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{pmatrix} = (x-a)^2 + b^2.$$

Es folgt aus (i), (ii) und (iii) nun, dass $\det(xI - T) = [(x-a)^2 + b^2]^s$. \square

(vi) T ist invertierbar und $T^* = (a^2 + b^2)T^{-1}$

Beweis

Aus (iii) und (v) haben wir

$$[T \upharpoonright_{V_j}]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$[T^* \upharpoonright_{V_j}]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Nun ist aber:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} =$$

$$[T^* \upharpoonright_{V_j}]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} [T \upharpoonright_{V_j}]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = [T^* T \upharpoonright_{V_j}]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = (a^2 + b^2)I_2.$$

Also $T^* T = (a^2 + b^2)I$. \square