Algebraische Zahlentheorie
Algebra B 4 - Sommersemester 2017
Prof'in Dr. Salma Kuhlmann

7.Vorlesung

18. Mai 2017

Fortsetzung vom Beweis von Lemma 6.5. Sei nun y_i Vertreter von $\bar{y}_i$ mit gleicher Periode. Wir zeigen: $x_1, y_1, \ldots, y_m$ sind unabhängig. Seien $a, a_1, \ldots, a_m \in R$ mit

$$(\ddagger) \qquad ax_1 + a_1 y_1 + \cdots + a_m y_m = 0$$

Dann ist $a_1\bar{y}_1 + \cdots + a_m\bar{y}_m = 0$, also muss $a_i\bar{y}_i = 0 \quad \forall i$ sein.
Ist p^{r_i} die Periode von $\bar{y}_i$, dann gilt $p^{r_i} \mid a_i$; p^{r_i} ist aber Periode für y_i, also gilt $a_i y_i = 0$ für alle i und damit ist (zurück in ($\ddagger$)) auch $ax_1 = 0$.

□

Beweis vom Satz 6.3. $M[p^\infty]$ endlich erzeugt$\Rightarrow$ O.E. $M = M[p^\infty]$ und $\exists x_1 \in M$ mit Periode p^{ν_1}, $\nu_1 \in \mathbb{N}$ minimal so daß $M = M[p^{\nu_1}]$. Betrachte $M[p]$; da $M[p]$ p-torsion ist, ist eine Skalarmultiplikation

$$\begin{array}{rcl} R/<p> \times M[p] & \to & M[p] \\ (a+<p>, x) & \mapsto & ax \end{array}$$

wohldefiniert ($\bar{a}_1 = \bar{a} \Rightarrow (a - a_1) = pa_2 \Rightarrow (a_1 - a)x = a_2 px = 0$). Also ist $M[p]$ ein $R/<p>$-Vektorraum.
Analog ist $\overline{M}[p]$ ein $R/<p>$-Vektorraum, wobei $\overline{M} := M/Rx_1$.

Behauptung: $\dim \overline{M}[p] < \dim M[p]$ als $R/<p>$-Vektorräume.

Beweis. Seien $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_m$ linear unabhängig in $\overline{M}[p]$. Lemma 6.5 liefert $y_i \in \bar{y}_i$ mit Periode p, so daß $x_1, y_1, \ldots, y_m$ unabhängig. Setze $z_1 := p^{\nu_1 - 1}x_1$. Dann hat z_1 Periode p, $z_1 \in M[p]$ und $z_1, y_1, \ldots, y_m \in M[p]$ sind immernoch unabhängig. □

Wir zeigen nun die Existenzaussage im Satz. Wir argumentieren per Induktion nach $\dim_{R/<p>}$.
O.E. ist $\overline{M} \neq 0$ (sonst ist $M \cong Rx_1 \cong R/<p^{\nu_1}>$). IA$\Rightarrow$ $\overline{M} = \overline{M}[p^\infty] \cong R\bar{x}_2 \oplus \cdots \oplus R\bar{x}_s$ und die Periode von $\bar{x}_i$ ist p^{ν_i} (d.h $R\bar{x}_i \cong R/<p^{\nu_i}>$ für $i = 2, \ldots, 5$) mit $1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_s$.
Lemma 6.5$\Rightarrow$ $\exists x_2, \ldots, x_s \in M$ so daß x_i Periode p^{ν_i} hat und $x_1, \ldots, x_s$ unabhängig, d.h
$M = M[p^\infty] \cong Rx_1 \oplus \cdots \oplus Rx_s \cong R/<p^{\nu_1}> \oplus \cdots \oplus R/<p^{\nu_s}>$ mit $1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_s$, wie behauptet.
Wir zeigen nun die Eindeutigkeit.
Sei

$$(*) \qquad 0 \neq M = M[p^\infty] \cong R/<p^{\mu_1}> \oplus \cdots \oplus R/<p^{\mu_s}>$$

mit $\mu := \mu_s$ maximal und $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_s$, d.h $M = M[p^\mu] \supsetneq M[p^{\mu-1}]$. Beachte, daß
$M[p], M[p^2]/M[p], \ldots, M[p^\mu]/M[p^{\mu-1}]$ alle $R/<p>$-Vektorräume sind. Aus $(*)$ folgt ausserdem, daß: $M[p] \cong <p^{\mu_1 - 1}> / <p^{\mu_1}> \oplus \cdots \oplus <p^{\mu_s - 1}> / <p^{\mu_s}>$
(weil $(R/<p^m>)[p] = <p^{m-1}> / <p^m>$ und $(N \oplus K)[p] \cong N[p] \oplus K[p]$ (ÜA) und
$\dim_{R/<p>} <p^{\mu_i - 1}> / <p^{\mu_i}> = 1$. (weil $\begin{array}{rcl} R & \to & <p^{m-1}> / <p^m> \\ x & \mapsto & p^{m-1}x + <p^m> \end{array}$ ein surjektiver Homomorphismus mit Kernel $<p>$ ist.)

Also ist $\dim_{R/<p>} M[p] = s = \sharp\{i \mid \mu_i \geq 1\}$. Schreibe nun

$$(**) \qquad M[p^2] \cong \bigoplus_{\mu_i=1} R/ < p > \oplus \bigoplus_{\mu_i>1} < p^{\mu_i-2} > / < p^{\mu_i} >$$

Aus $(**)$ folgt:

$$M[p^2]/M[p] \cong \bigoplus_{\mu_i\geq 2}(< p^{\mu_i-2} > / < p^{\mu_i} >)/(< p^{\mu_i-1} > / < p^{\mu_i} >)$$

d.h

$$M[p^2]/M[p] \cong \bigoplus_{\mu_i\geq 2} < p^{\mu_i-2} > / < p^{\mu_i-1} >$$

(und $< p^{m-2} > / < p^{m-1} > \cong R/ < p >$), also ist $\dim_{R/<p>} M[p^2]/M[p] = \sharp\{i \mid \mu_i \geq 2\}$. Allgemeiner berechnen wir $\dim_{R/<p>} M[p^m]/M[p^{m-1}] = \sharp\{i \mid \mu_i \geq m\}$ für $m = 1, 2, \ldots, \mu$. Insbesondere:
$\dim_{R/<p>} M[p^\mu]/M[p^{\mu-1}] = \sharp\{i \mid \mu_i \geq \mu\} = \sharp\{i \mid \mu_i = \mu\}$ □

§Noethersche Moduln

Sei R ein Ring, M ein R-Modul.

Lemma 7.1
Folgende Aussagen sind äquivalent für M:

1. jeder $N \leq M$ ist endlich erzeugt
2. jede aufsteigende Kette $N_1 \leq N_2 \leq \ldots$ von Untermoduln wird stationär, d.h $\exists i$ mit $N_i = N_{i+1} = \ldots$
3. jede $\varnothing \neq \mathcal{U}$ Menge von Untermoduln von M besitzt ein inklusionsmaximales Element.

Beweis. siehe nächste Vorlesung. □

Definition 7.1
M ist noethersch, wenn eine der Bedingungen (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) erfüllt ist.

8