11. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory, Katharina Dupont

WS 2012/2013: 29. November 2012

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 28. Januar 2016)

Korollar 1

α, β sind algebraisch über $F \to \alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta (\beta \neq 0)$ sind auch algebraisch über F.

Beweis

$F(\alpha, \beta)/F$ ist endlich und $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \in F(\alpha, \beta)$ für $\beta \neq 0$. □

Korollar 2

Sei L/F ist eine beliebige Körpererweiterung. Die Menge $\{\alpha \in L \mid \alpha \text{ alg } /F\}$ ist ein Unterkörper von L (und enthält F).

Definition

Dieser Unterkörper heißt der *relative algebraische Abschluss von F in L.*

Beispiele

(1) $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$. $\tilde{\mathbb{Q}} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ alg } /\mathbb{Q}\}$ ist der *Körper der algebraischen Zahlen.*

(2) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. $\tilde{\mathbb{Q}}^r := \{r \in \mathbb{R} \mid r \text{ alg } /\mathbb{Q}\}$ ist der *Körper der reellen algebraischen Zahlen.*

Es gilt $\tilde{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathbb{C}$ und $\tilde{\mathbb{Q}}^r \subsetneq \mathbb{R}$. Eigentlich gilt es ferner $|\tilde{\mathbb{Q}}| = |\tilde{\mathbb{Q}}^r| = \chi_0$ und $|\mathbb{C} \setminus \tilde{Q}| = |\mathbb{R} \setminus \tilde{\mathbb{Q}}^r| = 2^{\chi_0}$ (siehe Ausarbeitung dazu im Weihnachtsübungsblatt!)

Satz 1

$$\underset{\text{alg}}{L/K} \quad \text{und} \quad \underset{\text{alg}}{K/F} \quad \Rightarrow \quad \underset{\text{alg}}{L/F}$$

Beweis

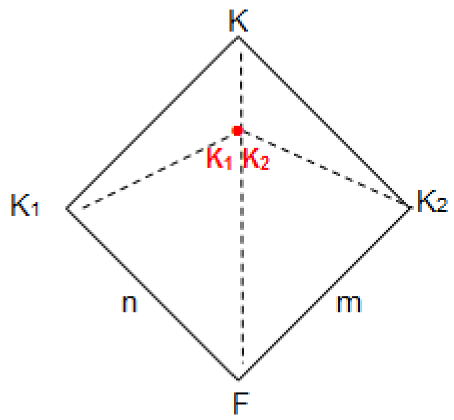
Sei $\alpha \in L, k(x) \in K[x]; k(\alpha) = 0$. Setze $k(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i \in K$ nicht alle Null. Betrachte $F_1 := F(a_0, \ldots, a_n)$ und $F_1(\alpha), F_1 \subseteq K, F_1(\alpha) \subseteq L; a_i$ alg $/F$ und α alg $/F_1$.
Also $[F_1 : F] < \infty$ und $[F_1(\alpha) : F_1] < \infty \Rightarrow [F_1(\alpha) : F] = [F_1(\alpha) : F_1][F_1 : F] < \infty$.
Insbesondere $F_1(\alpha)/F$ algebraisch und damit α algebraisch über F.

Definition

Sei K/K_1 und K/K_2 eine Körpererweiterung. $K_1K_2 := K_1(K_2) = K_2(K_1) \subseteq K$ heißt *das Kompositum von K_1 und K_2 in K.*

Lemma

Sei



$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine F-Basis von K_1 und $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ eine F-Basis von K_2 ohne Einschränkung mit $\alpha_1 = \beta_1 = 1$. Es ist span $_F\{\alpha_i\beta_j/i, j\} = K_1K_2$.

Beweis

$K_1K_2 = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$, so dass span $_F\{\alpha_i\beta_j/i, j\} \subseteq K_1K_2$. Umgekehrt müssen wir nun prüfen, dass span $_F\{\alpha_i\beta_j/i, j\}$ ein Unterkörper von K ist (der offensichtlich
$F \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ enthält) und damit span $_F\{\alpha_i\beta_j/i, j\} \supseteq K_1K_2$.
Aber es ist klar, dass span $_F\{\alpha_i\beta_j/i, j\}$ ein Unterkörper ist, weil zum Beispiel
$\alpha_i^k \in F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \text{span}\ _F\{\alpha_1 \ldots, \alpha_n\} = K_1$
und $\beta_j^l \in F(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \text{span}\ _F\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} = K_2$
und damit ist er abgeschlossen unter Multiplikation.
Analog ist er abgeschlossen unter Inversen.
Außerdem ist er abgeschlossen unter Addition und Substraktion (weil er ein F-Vektorraum ist).
$\square$