12. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory, Katharina Dupont

WS 2012/2013: 3. Dezember 2012

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 28. Januar 2016)

(A) Wir haben bewiesen:
Sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine F-Basis von K_1/F und $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ eine F-Basis von K_2/F. Dann ist span $_F\{\alpha_i\beta_j/i, j\} = K_1K_2$. Also ist $[K_1K_2 : F] \leq mn$.

(B) Wir betrachten ferner span $_{K_1}\{\beta_j; j = 1, \ldots, m\} = K_1K_2$, weil man $\lambda \in K_1K_2$ mit Hilfe von (A) als

$$\lambda = \sum \nu_{ij}\alpha_i\beta_j = \sum \underbrace{(\nu_{ij}\alpha_i)}_{\in K_1}\beta_j$$

mit $\nu_{ij} \in F$ schreibt.
Ferner gilt: $\{\beta_j; j = 1, \ldots, m\}$ ist eine Basis für K_1K_2/K_1, falls $\{\beta_j; j = 1, \ldots, m\}$ über K_1 linear unabhängig ist.

(C) Analog zeigt man span $_{K_2}\{\alpha_i; i = 1, \ldots, n\} = K_1K_2$ und $\{\alpha_i; i = 1, \ldots, n\}$ ist eine K_2-Basis für K_1K_2, falls $\{\alpha_i; i = 1, \ldots, n\}$ linear unabhängig über K_2 bleibt.

Wir haben bewiesen:
Korollar 1
Seien $F \subseteq K_1, K_2 \subseteq K; [K_1 : F] := n; [K_2 : F] := m$. Es gilt $[K_1K_2 : F] \leq nm$ und $[K_1K_2 : F] := mn$, falls β_j linear unabhängig über K_1 bleiben (oder α_i linear unabhängig über K_2 bleiben).

Korollar 2
Seien $F \subseteq K_1, K_2 \subseteq K$ mit $[K_1 : F] = n, [K_2 : F] = m$ und ggT $(n, m) = 1$.
Es gilt $[K_1K_2 : F] = mn$.

Beweis

$$\left.\begin{array}{ccc} n & | & [K_1K_2 : F] \\ m & | & [K_1K_2 : F] \end{array}\right\} \Rightarrow kgV(n, m) | [K_1K_2 : F]$$

$kgV(n, m) = \frac{nm}{ggT(n,m)} = mn$. Also $mn \leq [K_1K_2 : F] \leq mn$. $\square$

Zerfällungskörper

Definition 1

K/F ist ein *Zerfällungskörper* von $f(x) \in F[x]$, falls

(i) $f(x)$ vollständig in lineare Faktoren in $K[x]$ zerfällt ($\deg f \geq 1$) und

(ii) $F \subseteq L \subsetneq K \Rightarrow f(x)$ **nicht** vollständig in linearen Faktoren in $L(x)$ zerfällt.

Satz 1

Es gibt einen Zerfällungskörper K/F für $f(x)$ über F.

Beweis

Per Induktion zeigen wir zunächst, dass es eine Körpererweiterung E/F gibt, in der $f(x)$ vollständig zerfällt.
Setze $n = \deg f(x)$. $n = 1, E = F\checkmark$ Induktionsanfang $n > 1$.
Sei $p(x)$ ein irreduzibler Faktor von $f(x)$ in $F[x]$ mit $\deg p \geq 2$ (sonst ist wieder $E = F$).
Sei $\alpha \in E_1/F$ eine Nullstelle von $p(x)$, über E_1 haben wir also

$$f(x) = (x - \alpha)f_1(x) \tag{*}$$

$f_1(x) \in E_1[x]; \deg f_1 \leq n - 1$.

Induktionsanfang für f_1 und E_1 ergibt eine E/E_1 und f_1 zerfällt vollständig in $E[x]$. Nun ist auch $\alpha \in E$. Also zerfällt f wie in $(*)$ vollständig über E.
Setze nun $K := \bigcap\{L/F \subseteq L \subseteq E; f \text{ zerfällt vollständig in } L[x]\}$ □

Definition 2

K/F ist *normal*, falls

(i) K/F algebraisch ist

(ii) und K ein Zerfällungskörper über F

einer Familie von Plynomen $f(x) \in F[x]$.

Proposition

Sei $\deg f = n$ K/F ein Zerfällungskörper von f über F. Es gilt $[K : F] \leq n!$

Beweis

Sei $\alpha_1 \in F_1/F$, α_1 ist Nullstelle von f. Dann ist $[F_1 : F] \leq n$ und $f(x) = (x - \alpha_1)f_1(x)$, $f_1(x) \in F[x]$, $\deg f_1 \leq n - 1$.
Wiederholung: $\alpha_2 \in F_2/F_1, \alpha_2$ ist Nullstelle von f_1.
Dann ist $[F_2 : F_1] \leq n - 1$ und damit $[F_2 : F] \leq n(n - 1)$ usw. □

Satz 2 (Eindeutigkeit bis auf Isomorphie)
Sei $\varphi : F \xrightarrow{\sim} F'$ eine Isomorphie.
$f(x) \in F[x] \rightsquigarrow f'(x) \in F'[x]$ ($\deg f \geq 1$).
E ist Zerfällungskörper für f über F - E' ist Zerfällungskörper für f' über F'.
Dann läßt sich φ fortsetzen:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sigma", "\sim"'] \arrow[d, dash] & E' \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & F' \end{tikzcd}$$

Beweis
Sei $\deg f := n$. Induktion nach n. Wenn f über F erfällt, dann zerfällt f' über F' und $\sigma = \varphi$. Sei also $p(x)$ ein irreduzibler Faktor von $f(x)$ in $F[x]$ mit $\deg p \geq 2$ und $p' = \varphi(p)$ der entsprechende Faktor von $f'(x)$ in $F'[x]$.
$\alpha \in E$ ist Nullstelle für $p(x)$ und $\beta \in E'$ ist Nullstelle für $p'(x)$. Setze $F_1 := F(\alpha)$ und $F_1' := F'(\beta)$.
Aus Satz 3 der 9. Vorlesung (22.11.2012) folgt, dass ein σ_1 existiert, so dass

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "\sim", "\sigma_1"'] \arrow[d, dash] & F_1' \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & F' \end{tikzcd}$$

Wir haben also den folgenden Ansatz:

$$\sigma_1 : F_1 \xrightarrow{\sim} F_1'$$

$f(x) = (x - \alpha) f_1(x)$ über F_1, $\deg f_1 \leq n - 1$ und E ist ein Zerfällungskörper von f_1 über F_1, weil $E \supseteq F_1$ und alle Nullstellen von f_1 und für $E \supsetneq L \supseteq F_1$ ist es unmöglich, dass L alle Nullstellen von f_1 enthält (sonst enthält L α und alle Nullstellen von f_1, also alle Nullstellen von f - Widerspruch. Minimalität von E als ein Zerfällungskörper von f über F).
$f'(x) = (x - \beta) f_1'(x)$ über F_1', $\deg f_1 \leq n - 1$ und E' ist ein Zerfällungskörper von f_1' über F_1'.
Also habenw ir nun den Ansatz f_1, F_1, σ_1 mit $\deg f_1 \leq n - 1$.

Die Induktionsannahme liefert ein σ, so dass

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sim", "\sigma"'] \arrow[d, dash] & E' \arrow[d, dash] \\ F_1 \arrow[r, "\sim", "\sigma_1"'] & F_1' \end{tikzcd}$$

Also

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sim", "\sigma"'] \arrow[d, dash] & E' \arrow[d, dash] \\ F_1 \arrow[r, "\sim", "\sigma_1"'] \arrow[d, dash] & F_1' \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & F\text{'} \end{tikzcd}$$

Korollar

Ein Zerfällungskörper von $f \in F[x]$ über F ist bis Isomorphie auf F eindeutig.

Beweis

Seien K und K' Zerfällungskörper von f über F. Es gilt

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\sim", "\sigma"'] \arrow[d, dash] & K' \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "Id"] & F \end{tikzcd}$$

$\sigma \restriction F = Id$ □

Definition

(a) $\tilde{F}/F$ ist ein *algebraischer Abschluss* von F, falls
   (a) $\tilde{F}/F$ algebraisch ist;
   (b) $f(x) \in F[x]$ vollständig in lineare Faktoren über $\tilde{F}$ zerfällt für alle $f \in F[x]$.

(b) K heißt *algebraisch abgeschlossen*, falls jedes $f \in K[x]$ $(\deg f \geq 1)$ eine Nullstelle in K hat.

Bemerkung

K ist algebraisch abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $f \in K[x]$ $(\deg f \geq 1)$ zerfällt vollständig in linearen Faktoren über $K \Leftrightarrow K = \tilde{K}$.